

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

КПІ ім. Ігоря Сікорського

Фізико-технічний інститут

С. М. Пономаренко

---

# **Збірник задач з електрики та магнетизму**

---

Навчальний посібник

Електронне видання

КИЇВ 2018

УДК 537  
ББК 22.3  
П 563

Рекомендовано Вченою радою ФТІ  
Протокол № 5/2018 від 25.04.2018 р.

Рецензенти: В. В. Іванова, к.т.н., доценткафедри прикладної фізики ФТІ

Відповідальний редактор: Т. В. Литвинова, к.т.н., доцент, в. о. директора ФТІ

**С. М. Пономаренко**

П 563 Збірник задач з електрики та магнетизму: навчальний посібник / С. М. Пономаренко — К.: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018. — 90 с. — Бібліогр.: с. 89.

Для студентів фізико-технічного інституту КПІ ім. Ігоря Сікорського, які навчаються за спеціальністю 105 «Прикладна фізика та наноматеріали».

Ілюстративний матеріал підручника підготовлений за допомогою пакету [TikZ/Pgf](#).  
Верстка тексту проведена в видавничій системі  $\text{\LaTeX}$  2<sub>ε</sub> (компілятор  $\text{\Lua\LaTeX}$ ) на базі системи комп'ютерної верстки  $\text{\TeX}$  (Збірка [TeXLive 2017](#)) з використанням оболонки [TeXStudio](#).

© С. М. Пономаренко, 2018 р.

© КПІ ім. Ігоря Сікорського (ФТІ), 2018 р.

# Зміст

<b>Передмова</b> .....	<b>5</b>
<b>Розділ 0. Система рівнянь Максвелла</b> .....	<b>6</b>
§ 0.1. Рівняння Максвелла . . . . .	6
§ 0.2. Закони збереження . . . . .	7
§ 0.3. Граничні умови для полів . . . . .	7
§ 0.4. Зв'язок між полями та потенціалами . . . . .	8
§ 0.5. Лоренцові перетворення полів. Інваріанти електромагніт- ного поля . . . . .	8
<b>Розділ 1. Електростатика</b> .....	<b>11</b>
§ 1.1. Закон Кулона. Напруженість поля. Поняття потоку. Те- орема Гауса. Поле диполя . . . . .	11
§ 1.2. Поняття потенціалу. Зв'язок потенціалу і напруженості	15
§ 1.3. Поняття дивергенції. Теорема Гауса-Остроградського. Рівняння Пуассона . . . . .	16
§ 1.4. Провідники в електростатичному полі. Метод електри- чних зображень . . . . .	17
§ 1.5. Граничні умови. Поле у речовині. Діелектрична прони- кність . . . . .	20
§ 1.6. Електрична ємність. Ємність взаємна, ємності коефіцієнти	22
§ 1.7. Енергія електричного поля. Пондеромоторні сили . . . .	24
<b>Розділ 2. Постійний струм</b> .....	<b>29</b>
§ 2.1. Струми в середовищах. Закон Ома в диференціальній формі . . . . .	29
§ 2.2. Електричні кола. Правила Кірхгофа . . . . .	31
§ 2.3. Закон Джоуля-Ленца . . . . .	33

<b>Розділ 3. Магнітостатика.....</b>	<b>35</b>
§ 3.1. Магнітне поле. Закон Біо-Савара-Лапласа. Теорема про циркуляцію . . . . .	35
§ 3.2. Поняття ротора. Теорема Стокса. Магнітний момент. Векторний потенціал . . . . .	37
§ 3.3. Магнітне поле у речовині. Граничні умови . . . . .	39
§ 3.4. Взаємодія струмів з магнітним полем. Магнітний потік. Енергія та тиск поля . . . . .	44
<b>Розділ 4. Електродинаміка.....</b>	<b>48</b>
§ 4.1. Закон Фарадея . . . . .	48
§ 4.2. Надпровідники у магнітному полі . . . . .	52
§ 4.3. Рівняння Максвелла. Вектор Пойнтінга. Скін-ефект . . .	53
<b>Розділ 5. Рух частинок в електромагнітному полі.....</b>	<b>57</b>
§ 5.1. Рух заряду в електричному полі . . . . .	57
§ 5.2. Рух заряду в магнітному полі . . . . .	57
§ 5.3. Рух заряду в електричному та магнітному полях . . . .	58
<b>Розділ 6. Кола змінного струму.....</b>	<b>59</b>
§ 6.1. Перехідні процеси в електричних колах . . . . .	59
§ 6.2. Вільні коливання в електричних колах . . . . .	60
§ 6.3. Вимушені коливання в електричних колах. Резонанс . .	61
<b>Відповіді.....</b>	<b>64</b>
<b>Додатки.....</b>	<b>79</b>
Додаток А. Основні формули векторного аналізу . . . . .	79
А.1 Диференціальні оператори . . . . .	79
А.2 Диференціальні операції в різних системах координат . . . . .	79
А.3 Другі похідні . . . . .	80
А.4 Похідні від добутків . . . . .	80
А.5 Інтегральні характеристики та теореми . . . . .	81
Додаток Б. Системи одиниць в електродинаміці . . . . .	82
Додаток В. Фізичні константи . . . . .	84
Додаток Г. Сфери в електричному та магнітному полях . . . .	85
<b>Література.....</b>	<b>89</b>

## Передмова

Дисципліна «Електрика та магнетизм» курсу «Загальна фізика», який вивчається студентами Фізико-технічного інституту КПІ імені Ігоря Сікорського на другому курсі, входить до циклу базової підготовки студентів, що навчаються за спеціальністю 105 «Прикладна фізика та наноматеріали». Велика частина програмного матеріалу, пов'язана з умінням розв'язування конкретних задач. Вироблення умінь, навичок і методів розв'язку величезного числа задач, звичайно, не може бути реалізована тільки за рахунок годин, відведених на практичні заняття, і має на увазі велику самостійну роботу студента.

Назви розділів та підрозділів посібника відповідають робочій програмі курсу. Практично до кожної задачі в кінці збірника наведена відповідь, деякі задачі містять детальних розв'язок. Всі формули в основному тексті і відповідях наведені в гаусовій системі одиниць (СГС). Вихідні дані і числові відповіді надані з урахуванням точності значень відповідних величин і правил дій над наближеними числами. В кінці збірника дана таблиця основних фізичних констант та інші довідкові таблиці.

Дана версія посібника є електронним виданням, тому для зручності користування ним передбачена система навігації у вигляді гіперпосилань та бічної панелі змісту.

*С. М. Пономаренко*

# Система рівнянь Максвелла

*Невозможно избавиться от ощущения, что эти математические формулы существуют независимо от нас и обладают собственным разумом, что они мудрее нас, мудрее даже тех, кто их открыл, и что мы извлекаем из них больше, чем первоначально было заложено*

Г. Герц

## § 0.1. Рівняння Максвелла

Назва рівняння	Математична форма (система СГС)
Теорема Гауса для електричного поля	$\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho$
Теорема Гауса для магнітного поля	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$
Закон електромагнітної індукції	$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$
Теорема про циркуляцію магнітного поля	$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$

$\mathbf{E}$  – вектор напруженості електричного поля,

$\mathbf{H}$  – вектор напруженості магнітного поля,

$\mathbf{D}$  – вектор індукції електричного поля, визначається формулою:

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$$

$\mathbf{B}$  – вектор індукції магнітного поля, визначається формулою:

$$\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M}$$

$\mathbf{P}$  – вектор поляризації (дипольний момент одиниці об'єму),

$\mathbf{M}$  – вектор намагніченості (дипольний магнітний момент одиниці об'єму),

$\rho$  – об'ємна густина вільних електричних зарядів,

$\mathbf{j}$  – вектор густини електричного струму провідності.

У випадку лінійних ізотропних середовищ:

$$\begin{aligned}\mathbf{D} &= \varepsilon \mathbf{E}, \\ \mathbf{B} &= \mu \mathbf{H}.\end{aligned}$$

$\varepsilon$  – діелектрична проникність середовища,  
 $\mu$  – магнітна проникність середовища.

## § 0.2. Закони збереження

З рівнянь Максвела випливають закони збереження:

- електричного заряду

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$$

- енергії

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S} = -\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$$

$W$  – енергія електромагнітного поля, визначається формулою:

$$W = \frac{1}{8\pi} \int_V (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) dV$$

$\mathbf{S}$  – вектор Пойнтінга (вектор густини потоку енергії), визначається формулою:

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{H},$$

величина

$$w = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E},$$

є потужністю, що виділяється в одиниці об'єму речовини (закон Джоуля-Ленца).

## § 0.3. Граничні умови для полів

$$\begin{aligned}E_{1\tau} &= E_{2\tau}, & D_{2n} - D_{1n} &= 4\pi\sigma \\ B_{1n} &= B_{2n}, & H_{2\tau} - H_{1\tau} &= \frac{4\pi}{c}i\end{aligned}$$

$\sigma$  – поверхнева густина вільних зарядів на границі розділу,  
 $i$  – поверхневий струм провідності, який тече по границі розділу.

## § 0.4. Зв'язок між полями та потенціалами

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \varphi, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

$\varphi$  – скалярний потенціал,

$\mathbf{A}$  – вектор-потенціал.

Потенціали електромагнітного поля визначені не однозначно, якщо замість потенціалів  $\mathbf{A}$  та  $\varphi$  вибрати інші  $\mathbf{A}'$  та  $\varphi'$ , які пов'язані з вихідними перетвореннями:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}' &= \mathbf{A} + \nabla f \\ \varphi' &= \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t}, \end{aligned}$$

де  $f(x, y, z, t)$  – довільна функція, то характеристики поля  $\mathbf{E}$  та  $\mathbf{B}$  залишаються незмінними.

## § 0.5. Лоренцові перетворення полів. Інваріанти електромагнітного поля

При перетвореннях Лоренца, у випадку відносного руху систем відліку вздовж осі  $OX$  (буст):

$$\begin{aligned} dx &= (dx' + V dt') \Gamma \\ dy &= dy' \\ dz &= dz' \\ dt &= \left( dt' + \frac{V}{c^2} dx' \right) \Gamma \end{aligned}$$

вектори  $\mathbf{E}$  та  $\mathbf{B}$  перетворюються за законами:

$$\begin{aligned} E'_x &= E_x, & B'_x &= B_x \\ E'_y &= \left( E_y - \frac{v}{c} B_z \right) \Gamma, & B'_y &= \left( B_y + \frac{v}{c} E_z \right) \Gamma \\ E'_z &= \left( E_z + \frac{v}{c} B_y \right) \Gamma, & B'_z &= \left( B_z - \frac{v}{c} E_y \right) \Gamma, \end{aligned}$$

$$\text{де } \Gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$



4-вектор густини струму:

$$j^i = \rho \frac{dx^i}{dt} = (c\rho, \mathbf{j}),$$

де  $\rho$  – густина електричного заряду,  $\mathbf{j}$  – 3-вектор густини струму.

4-потенціал електромагнітного поля:

$$A_i = (\varphi, -\mathbf{A}).$$

Калібровочні перетворення:

$$A'_k = A_k - \frac{\partial f}{\partial x^k}$$

Тензор електромагнітного поля:

$$F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k},$$

у формі матриці, тензор  $F_{ik}$  має вигляд:

$$F_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix},$$

де  $i, k = 0, 1, 2, 3$  ( $i$  – нумерує рядки,  $k$  – стовпці.)

Із компонент тензора можна утворити інваріанти:

$$F_{ik}F^{ik} = \text{inv}, \quad e^{iklm}F_{ik}F_{lm} = \text{inv},$$

де  $e^{iklm}$  – повністю антисиметричний тензор, в 3-вигляді, інваріантами перетворень Лоренца виглядають наступним чином:

$$E^2 - B^2 = \text{inv}, \quad \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = \text{inv}.$$

Рівняння руху частинки в електромагнітному полі:

$$mc \frac{du^i}{ds} = \frac{e}{c} F^{ik} u_k,$$

де  $u_k$  – 4-швидкість частинки.

Рівняння Максвела:

$$\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = -\frac{4\pi}{c} j^i$$

$$\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial F^{kl}}{\partial x^i} + \frac{\partial F^{li}}{\partial x^k} = 0.$$

Тензор енергії-імпульса електромагнітного поля:

$$T^{ik} = \frac{1}{4\pi} \left( -F^{il} F_l^k + \frac{1}{4} g^{ik} F_{lm} F^{lm} \right),$$

де  $g^{ik}$  – метричний тензор.

# Електростатика

## § 1.1. Закон Кулона. Напруженість поля. Поняття потоку. Теорема Гауса. Поле диполя

Для випадку електростатики за відсутності матерії ( $\varepsilon = 1$ ), рівняння Максвелла приймають вигляд:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= 4\pi\rho, \\ \nabla \times \mathbf{E} &= 0.\end{aligned}$$

Розв'язком цих рівнянь є напруженість електростатичного поля в точці з радіус-вектором  $\mathbf{r}$ , що створена сукупністю зарядів, які розташовані в точках  $\mathbf{r}_i$ :

$$\mathbf{E} = \int_V \frac{\rho dV}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_i).$$

Електричний момент:

$$\mathbf{p} = \int_V \rho \mathbf{r} dV.$$

Напруженість поля електричного диполя:

$$\mathbf{E} = \frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{p}}{r^3}.$$

**Визначення напруженості електростатичного поля, що створюється рівномірно розподіленими зарядами**

**1.1.** На поверхню нескінченної площини з поверхневим зарядом  $\sigma$  нанесено шар матеріалу товщиною  $d$ , який має рівномірний розподіл заряду густиною  $\rho$ . Визначте напруженість електричного поля у всіх точках простору.

**1.2.** Однорідно заряджене кільце радіуса  $R$  має заряд  $Q$ . Покажіть, що точковий заряд  $-q$  маси  $m$ , який знаходиться на осі кільця буде здійснювати гармонічні коливання при невеликому зміщенні вздовж осі відносно центра та знайдіть частоту цих коливань.

**1.3.** Обчисліть напруженість електричного поля в точці, яка розташована на осі тонкого, рівномірно зарядженого диска з густиною заряду  $\sigma$  радіусом  $R$ , на відстані  $z$  від його центру.

**1.4.** Заряд рівномірно розподілений по поверхні півсфери радіуса  $R$  з поверхневою густиною заряду  $\sigma$ . Визначити напруженість електричного поля  $\mathbf{E}$  в центрі півсфери.

**1.5.** На нескінченній площині, що рівномірно заряджена з поверхневою густиною  $\sigma$ , лежить оболонка напівсфери, яка торкається площини тільки своїм полюсом (рис. 1.1). Знайти напруженість електричного поля у центрі основи оболонки, точці  $O$ , якщо півсфера заряджена з густиною  $-\sigma$ .

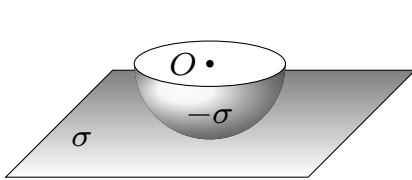


Рис. 1.1. До задачі 1.5

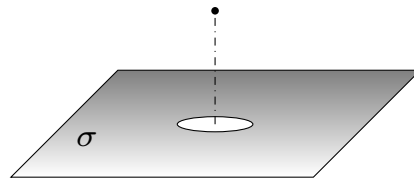


Рис. 1.2. До задачі 1.6

**1.7.** У сфері, яка заряджена рівномірно з поверхневою густиною заряду  $\sigma$ , вирізано круглий отвір, малий в порівнянні з радіусом сфери. Знайти напруженість поля в центрі цього отвору.

**1.8.** У сфері радіусом  $R$ , яка заряджена рівномірно з поверхневою густиною заряду  $\sigma$ , вирізано круглий отвір радіусом  $r$ , малий в порівнянні з радіусом сфери ( $r \ll R$ ). Знайти напруженість поля в центрі сфери.

**1.9.** У необмеженому плоскому шарі товщиною  $2d$  об'ємна густина заряду змінюється за законом  $\rho = \rho_0 \frac{x}{d}$ , де  $x$  — вісь, перпендикулярна площині шару. В шарі є тонкий канал вздовж осі  $x$ , в якому знаходиться точковий диполь з масою  $m$  і дипольним моментом  $p$ . Визначити період малих поздовжніх коливань диполя.

**1.10.** Дві однорідно і різнойменно заряджені поверхневою густиною  $\sigma$  нескінченні площини перетинаються під прямим кутом. Знайти величину та напрямок напруженості електростатичного поля в довільній точці та побудувати силові лінії.

**1.11.** Сферична порожнина розташована ексцентрично в середині кулі, яка однорідно заряджена по об'єму з густиною  $\rho$ . Відстань між центрами кулі і порожнини дорівнює  $l$ . Визначити напруженість  $\mathbf{E}$  електричного поля в точках порожнини.

## Визначення потоку електростатичного поля через довільні поверхні

**1.12.** Поле створюється в вакуумі рівномірно зарядженою прямолінійною нескінченною ниткою. Лінійна густина заряду дорівнює  $\lambda$ . Обчислити потік вектора напруженості цього поля через поверхню квадрата зі стороною  $l$ , площа якого паралельна зарядженій нитці і розташована від неї на відстані  $l/2$ .

**1.13.** Напівнескінченна рівномірно заряджена нитка має лінійну густина заряду  $\lambda$ . Знайти потік електричного поля через кільце радіусом  $R$ , центр якого співпадає з кінцем нитки. Нитка перпендикулярна до площини кільця.

**1.14.** Точковий заряд розташований в одній з вершин куба. Знайти потік електричного поля через куб. Визначити потік через кожну з граней куба.

**1.15.** Заряд  $q$  знаходиться на осі кільця радіусом  $R$ . Відстань від заряду до центра кільця дорівнює  $l$ . Знайти потік електричного поля через поверхню, що охоплюється кільцем.

## Визначення напруженості електростатичного поля, що створюється нерівномірним розподілом зарядів

**1.16.** Тонке кільце радіусом  $R$  заряджене з лінійною густиною, яка змінюється за законом  $\lambda = \lambda_0 \cos \varphi$ , де  $\lambda_0$  – постійна,  $\varphi$  – полярний кут. Знайти модуль напруженості електричного поля: а) в центрі кільця; б) на осі кільця в залежності від відстані  $z$  до його центру. Дослідити отриманий вираз при  $z \gg R$ .

**1.17.** Сфера радіуса  $r$ , яка заряджена з поверхневою густиною заряду  $\sigma = \mathbf{a} \cdot \mathbf{r}$ , де  $\mathbf{a}$  – постійний вектор,  $\mathbf{r}$  – радіус-вектор точки сфери відносно її центру (рис. 1.3). Знайти напруженість  $\mathbf{E}$  електричного поля в центрі сфери.

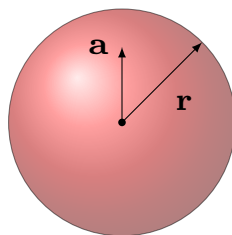


Рис. 1.3. До задачі 1.17

**1.18.** Система складається з кулі радіусом  $R$ , яка заряджена рівномірно, і навколишнього середовища, що заповнене зарядом з об'ємною густиною  $\rho = \frac{a}{r}$ , де  $a$  – константа,  $r$  – відстань до центру кулі. Знайти заряд кулі, при якому модуль вектора напруженості електричного поля поза її межами не буде залежати від  $r$ .

**1.19.** Середня густина заряду електронної хмари в атомі водню, що має заряд  $q_e$ , дорівнює  $\rho = \frac{q_e}{\pi a^3} e^{-\frac{2r}{a}}$ , де  $a$  – борівський радіус, а  $r$  – відстань до протона. Визначити напруженість  $\mathbf{E}$  електричного поля в атомі водню. Дослідити  $\mathbf{E}$  на малих ( $r \ll a$ ) та великих ( $r \gg a$ ) відстанях від протона.

### Визначення напруженості поля диполя та дії поля на диполь

**1.20.** У центрі півкільця радіусом  $R$  знаходиться точковий заряд  $-q$ . Півкільце має повний заряд  $+q$ , розподілений за законом  $\lambda \sim \cos \varphi$ , де  $\lambda$  – лінійна густина заряду,  $\varphi$  – кут між радіусом-вектором даної точки і віссю симетрії системи  $Oz$  (рис. 1.4). В дипольному наближенні знайти напруженість електричного поля на осі  $Oz$  на відстані  $z$  від системи ( $z \gg R$ ).

**1.21.** На відстані  $l$  від плоского конденсатора напруженість електричного поля дорівнює  $E_1$  (рис. 1.5). Поле в середині конденсатора  $E_2$ . Знайдіть об'єм конденсатора. Відомо, що  $l$  набагато більше за відстань між пластинами.

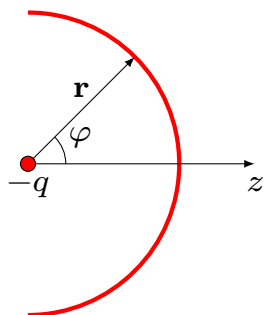


Рис. 1.4. До задачі 1.20

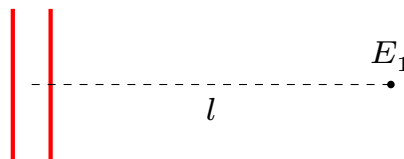


Рис. 1.5. До задачі 1.21

**1.22.** Визначити силу взаємодії двох диполей з моментами  $\mathbf{p}_1$  та  $\mathbf{p}_2$ , які розміщені на відстані  $d$  один від одного і орієнтовані один відносно одного а)  $(\mathbf{p}_1 \uparrow \uparrow \mathbf{p}_2) \perp \mathbf{r}$ , б)  $(\mathbf{p}_1 \downarrow \uparrow \mathbf{p}_2) \perp \mathbf{r}$ , в)  $\mathbf{p}_1 \uparrow \uparrow \mathbf{p}_2 \uparrow \mathbf{r}$ , г)  $\mathbf{p}_1 \downarrow \uparrow \mathbf{p}_2 \uparrow \mathbf{r}$ , де  $\mathbf{r}$  – радіус-вектор напрямлений від диполя 1 до диполя 2.

**1.23.** Частинка з дипольним моментом  $\mathbf{p}$  розміщена на відстані  $r$  від довгого зарядженого дроту, густина поверхневого заряду на якому

λ. Знайти силу та момент сил взаємодії частинки та дроту, якщо: а)  $\mathbf{p}$  напрямлений паралельно дроту, б)  $\mathbf{p}$  напрямлений перпендикулярно до дроту, в)  $\mathbf{p}$  напрямлений перпендикулярно дроту і лежить в паралельній до нього площині.

**1.24.** Незаряджена металева куля радіуса  $R$  вноситься в електричне поле, яке за відсутності кулі було однорідним і дорівнювало  $\mathbf{E}_0$ . Знайти дипольний момент кулі. Визначити густину поверхневих зарядів на кулі. Знайти повний заряд, індукований на одній половині поверхні кулі.

**1.25.** З якою силою взаємодіють дві незаряджені кулі радіусами  $R$ , що вміщені в однорідне електричне поле напруженістю  $\mathbf{E}_0$ , яке напрямлене а) вздовж прямої, що з'єднує центри куль, б) перпендикулярно до прямої, що з'єднує центри куль. Відстань між кулями  $l \gg R$ ?

## § 1.2. Поняття потенціалу. Зв'язок потенціалу і напруженості

Зв'язок напруженості та потенціалу:

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi.$$

Рівняння Пуассона:

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho.$$

Розв'язком цього рівняння є потенціал електростатичного поля в точці з радіус-вектором  $\mathbf{r}$ , що створена сукупністю зарядів, які розташовані в точках  $\mathbf{r}_i$ :

$$\varphi = \int_V \frac{\rho dV}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}.$$

**Визначення потенціалу електростатичного поля, що створюється рівномірно розподіленими зарядами**

**1.26.** Знайти потенціал тонкого кільця радіусом  $R$ , яке рівномірно заряджене зарядом  $q$  як функцію відстані  $r$  від центра кільця при  $r \gg R$ .

**1.27.** Два коаксіальних тонких однорідно заряджених кільця однаковими радіусами  $R$  розташовані на відстані  $a$ , один від одного. Заряди кілець  $+q$  і  $-q$  відповідно. Знайти різницю потенціалів між центрами кілець.

**1.28.** Обчисліть потенціал електричного поля в точці, яка розташована на осі тонкого рівномірно зарядженого диска з густиною заряду  $\sigma$  і

радіусом  $R$ , на відстані  $z$  від його центру. Знайдіть напруженість електричного поля в цій точці, використовуючи формулу зв'язку напруженості та потенціалу.

**1.29.** Знайти потенціал на краю тонкого диска радіусом  $R$ , по якому рівномірно розподілений заряд з поверхневою густиною  $\sigma$ .

## § 1.3. Поняття дивергенції. Теорема Гауса-Остроградського. Рівняння Пуассона

**Пряма задача електростатики: знайти значення напруженості чи потенціалу, що створюються заданим розподілом зарядів**

**1.30.** Знайти потенціал в довільній точці простору а) кулі радіусом  $R$ , рівномірно зарядженої по об'єму густиною заряду  $\rho$ ; б) циліндра радіусом  $R$ , рівномірно зарядженого лінійною густиною  $\lambda$ ; в) плоского шару товщиною  $2h$ , рівномірно зарядженого об'ємною густиною  $\rho$ .

**1.31.** Кульовий шар між сферами радіусів  $R_1$  і  $R_2$  ( $R_1 < R_2$ ) заряджений з густиною  $\rho = \frac{a}{r^2}$ . Знайти потенціал поля в довільній точці.

**Обернена задача електростатики: знайти розподіл зарядів, що створюють задані значення напруженості чи потенціалу**

**1.32.** Знайти розподіл зарядів, які створюють потенціал<sup>1</sup>  $\varphi = \frac{q}{r} e^{-\frac{r}{a}}$ , де  $a$  — деяка додатна константа. *Вказівка:* Згадайте, що  $\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = -4\pi\delta(r)$ , де  $\delta(r)$  — дельта-функція Дірака [6, Глава I].

**1.33.** Напруженість електричного поля в просторі дається формулою:

$$\mathbf{E} = \frac{e\mathbf{r}}{r^3}(1 + br)e^{-br}$$

де  $e$  і  $b$  — додатні константи, а  $r$  — відстань до початку координат. Визначити розподіл об'ємної густини заряду, що створює це поле. Чому дорівнює повний заряд  $Q$ ?

**1.34.** Заряджена куля радіуса  $R$  створює в просторі поле, яке дорівнює  $E = \frac{4}{3}\pi\rho_0 r \left(1 - \frac{3r}{4R}\right)$  всередині кулі ( $r < R$ ) і  $E = \frac{\pi}{3}\frac{R^3}{r^2}$  зовні ( $r > R$ ). За яким законом розподілено заряд всередині кулі?

**1.35.** Потенціал поля всередині зарядженої кулі залежить тільки від відстані до його центру як  $\varphi = ar^2 + b$ , де  $a$  і  $b$  — константи. Знайти розподіл об'ємного заряду всередині кулі.

<sup>1</sup>Потенціал такого виду називається екранованим кулонівським потенціалом [2, §1.8, стор.26].



**1.36.** В електронній лампі електрони вилітають із однієї розжареної металевої пластини (катода) і збираються на іншій плоскій металевій пластині (аноді), яка розташована паралельно на відстані  $d$  ( $d$  набагато менша за лінійні розміри пластин). Потенціал електричного поля між пластинами змінюється за законом  $\varphi = kx^{\frac{4}{3}}$ , де  $x$  — відстань від катода. Чому дорівнює густина поверхневих зарядів на пластинах? Як змінюється густина об'ємного заряду  $\rho(x)$  в просторі між пластинами?

## § 1.4. Провідники в електростатичному полі. Метод електричних зображень

**Обчислення потенціалу та напруженості провідника в присутності інших заряджених тіл**

**1.37.** Дві віддалені одна від одної провідні кулі, радіуси яких  $R_1$  і  $R_2$ , несуть заряди  $Q_1$  і  $Q_2$  відповідно. Чому дорівнюватимуть потенціали і заряди куль після того, як їх з'єднають дротом?

**1.38.** Металева куля радіусом  $R_1$  оточена тонкою металевою концентричною оболонкою радіусом  $R_2$ , а в простір між ними на відстані  $R$  від центру знаходиться точковий заряд  $Q$  ( $R_1 < R < R_2$ ). Знайти заряди кулі та оболонки, якщо обидва провідники заземлені?

**1.39.** Дві концентричні сфери з радіусами  $R_1$  і  $R_2$  ( $R_1 < R_2$ ) отримали заряди  $q_1$  і  $q_2$  відповідно, які розподілилися рівномірно по їх поверхнях. Знайти потенціал поля в довільній точці на відстані  $r$  від центру сфер.

**1.40.** Точковий заряд  $q$  знаходиться на відстані  $r$  від центра незарядженого сферичного шару провідника, внутрішній і зовнішній радіуси якого дорівнюють відповідно  $R_1$  і  $R_2$ . Знайти потенціал в точці центрі, якщо  $r < R_1$ .

**1.41.** Три концентричні сфери мають радіуси  $R_1$ ,  $R_2$  та  $R_3$  ( $R_1 < R_2 < R_3$ ). Сфери 1 та 3 несуть заряди відповідно  $+Q$  і  $-Q$ . Середня сфера 2 заземлена провідником (рис. 1.6). Знайти заряд  $q$  заземленої сфери 2 та залежності  $E(r)$  та  $\varphi(r)$  і побудувати їх графіки.

**1.42.** Три концентричні сфери мають радіуси  $R_1$ ,  $R_2$  та  $R_3$  ( $R_1 < R_2 < R_3$ ). Сфері 2 надають заряд  $+Q$ , а сфери 1 та 3 з'єднують провідником (рис. 1.7). Знайти заряди сфер 1 та 3. Знайти залежності  $E(r)$  та  $\varphi(r)$  і побудувати їх графіки.

**1.43.** Розв'язати задачу 1.42 за умови, що сферу 3 заземлюють. Знайти залежності  $E(r)$  та  $\varphi(r)$  і побудувати їх графіки.

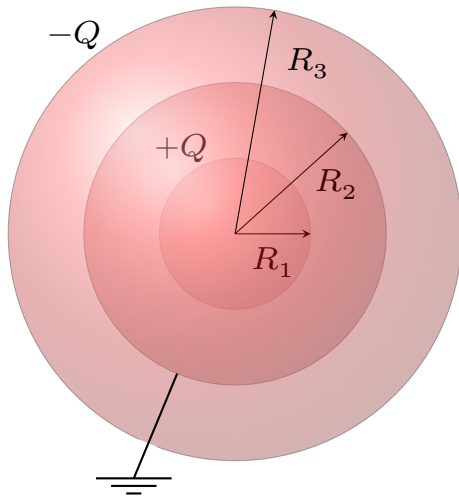


Рис. 1.6. До задачі 1.41

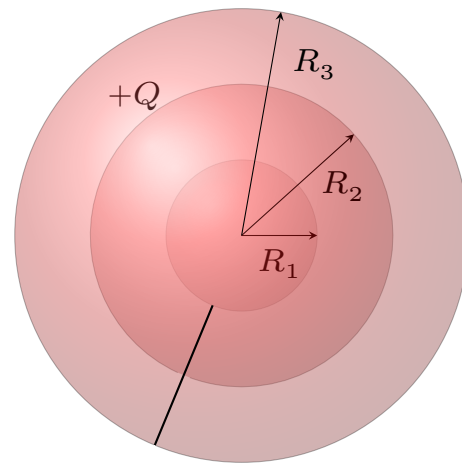


Рис. 1.7. До задачі 1.42

**Знаходження розподілу зарядів на металевих провідниках. Визначення сили взаємодії точкового заряду чи диполя з металевими провідниками**

**1.44.** В металевій ізольованій кулі радіусом  $R$  є сферична порожнина, в центрі якої знаходиться заряд  $q_0$ . Поза кулею на відстані  $b$  від її центру розташовано другий заряд  $q$  (рис. 1.8). Знайти силу, яка діє на заряд  $q$ .

**1.45.** В металевій кулі радіусом  $R$  є дві сферичні порожнини, радіусами  $a$  та  $b$ . В центрі кожної порожнини розташовані електричні заряди  $q_a$  та  $q_b$ , відповідно (рис. 1.9). Знайдіть густини поверхневого заряду  $\sigma_a$ ,  $\sigma_b$  та  $\sigma_R$  на поверхнях сфер.

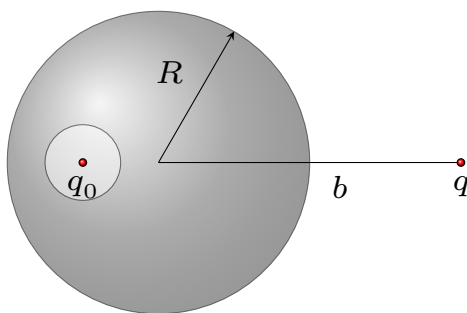


Рис. 1.8. До задачі 1.44

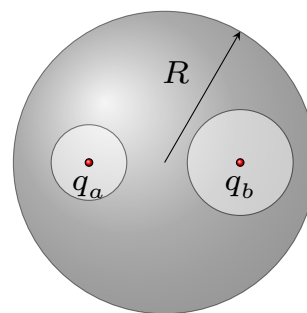


Рис. 1.9. До задачі 1.45

**1.46.** Точковий заряд  $q$  знаходиться на відстані  $b$  від центру незарядженої металеві кулі радіусом  $R$  ( $b > R$ ). Визначити силу взаємодії між зарядом і кулею. Розглянути випадки коли а) куля незаряджена і заземлена, б) куля незаряджена і незаземлена, в) куля несе заряд  $Q$  і незаземлена. Для всіх випадків проаналізувати отриманий вираз для сили при  $b \gtrless R$ .

**1.47.** Точковий заряд  $q$  знаходиться на відстані  $a$  від центру заземленої незарядженої металеві кулі радіусом  $R$  ( $a < R$ ). Визначити силу взаємодії між зарядом і кулею. Як зміниться результат якщо куля буде незаземленою? Як зміниться результат якщо куля буде зарядженою?

**1.48.** Точковий заряд  $q$  поміщений на відстані  $R/2$  від центру тонкостінної металеві незаземленої сфери радіусом  $R$ , яка має заряд  $-2q$ . Визначити поверхневу густину заряду на внутрішній і зовнішній поверхнях сфери в точках, найбільш віддалених від цього заряду. Як зміниться результат, якщо сферу заземлити?

**1.49.** Знайти розподіл зарядів на поверхні провідника, границя якого являє собою нескінченну площину з виступом у вигляді напівсфери радіусом  $R$ . Поверхнева густина заряду на великій відстані від виступу  $\sigma_0$ .

**1.50.** Довга тонка дротина розташована паралельно осі довгого металеві циліндра радіусом  $r$  на відстані  $R > r$  від його осі. Лінійна густина заряду нитки  $\lambda$ , а циліндра  $-\lambda$ . Знайти силу взаємодії на одиницю довжини між провідниками.

**1.51.** На відстані  $b = 10R$  від заземленої незарядженої металеві сфери радіусом  $R$  розташований точковий електричний диполь з моментом  $p$ , причому вісь диполя перпендикулярна прямій, що сполучає центр сфери з серединою осі диполя (рис. 1.10). Знайти силу взаємодії між диполем і сферою.

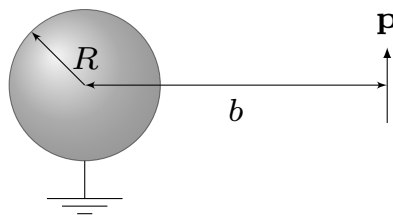


Рис. 1.10. До задачі 1.51

**1.52.** Заземлена металеві куля радіусом  $R$  лежить на тонкому рівномірно зарядженому діелектричному диску такого ж радіуса. Знайти заряд кулі, якщо заряд диска дорівнює  $q$ .

**1.53.** Система двох тонких концентричних півкілець з зарядами  $Q$  і  $q$ , та радіусами  $r_1$  і  $r_2$ , поміщені в середину заземленої металеві сфери радіусом  $R$ , так, що центри кілець і кулі співпадають. Знайти потенціал у центрі сфери, якщо площини кілець перпендикулярні.

## § 1.5. Граничні умови. Поле у речовині. Діелектрична проникність

Рівняння Максвелла для електростатичного поля в речовині:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{D} &= 4\pi\rho, \\ \nabla \times \mathbf{E} &= 0.\end{aligned}$$

де  $\rho$  – густина вільних електричних зарядів.

Теорема Гауса для вектора  $\mathbf{E}$  в речовині:

$$\oint_S \mathbf{E} d\mathbf{S} = 4\pi \left( \int_V \rho dV + \int_V \rho' dV \right),$$

де  $\rho$  – густина вільних електричних зарядів,  $\rho'$  – густина зв'язаних електричних зарядів.

Теорема Гауса для вектора поляризації  $\mathbf{P}$ :

$$\oint_S \mathbf{P} d\mathbf{S} = - \int_V \rho' dV.$$

Диференціальна форма:

$$\nabla \cdot \mathbf{P} = -\rho',$$

де  $\rho'$  – об'ємна густина зв'язаних електричних зарядів.

Поверхнева густина зв'язаних електричних зарядів на межі розділу двох діелектриків:

$$\sigma' = (\mathbf{P}_{1n} - \mathbf{P}_{2n}) \mathbf{n},$$

де  $\mathbf{n}$  – вектор нормалі до поверхні розділу двох середовищ, що направлений з середовища 1 в середовище 2.

Означення вектора електричної індукції:

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$$

Теорема Гауса для вектора  $\mathbf{D}$ :

$$\oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = \int_V \rho dV.$$

Зв'язок між вектором поляризації та електричним полем, яке зумовило поляризацію (у випадку ізотропних діелектриків):

$$\mathbf{P} = \chi\mathbf{E},$$

де  $\chi$  – поляризованість діелектрика.

$$\varepsilon = 1 + 4\pi\chi,$$

діелектрична проникність діелектрика.

Граничні умови для векторів  $\mathbf{E}$  та  $\mathbf{D}$ :

$$\begin{aligned}E_{1\tau} &= E_{2\tau}, \\ D_{2n} - D_{1n} &= 4\pi\sigma,\end{aligned}$$

де  $\sigma$  – поверхнева густина вільних електричних зарядів на границі розділу діелектриків.

**Знаходження напруженості електростатичного поля в діелектриках, які мають статичну поляризацію**

**1.54.** Знайти напруженість та індукцію електричного поля в центрі матеріалу, який має форму прямого круглого циліндра довжиною  $l$  і радіусом  $R$ , вектор поляризації якого однорідний, напрямлений вздовж осі і дорівнює  $\mathbf{P}$ .

**1.55.** Розв'язати задачу 1.54, у випадку, якщо вектор поляризації  $\mathbf{P}$  напрямлений перпендикулярно осі.

**1.56.** Діелектрична куля поляризована однорідно з вектором поляризації  $\mathbf{P}$ . Знайти напруженість електричного поля всередині кулі.

**1.57.** Нескінченно довгий діелектричний циліндр радіусом  $R$  радіально поляризований таким чином, що вектор поляризації визначається законом  $\mathbf{P} = a\mathbf{r}$ , де  $a$  – позитивна константа. Знайти заряд, який припадає на одиницю довжини циліндра. Визначити напруженість та індукцію електричного поля в залежності від відстані до осі в середині та зовні циліндра.

**Знаходження напруженості електростатичного поля в діелектриках по заданому розподілу заряду**

**1.58.** Точковий заряд  $q$  розташований на плоскій границі розділу двох однорідних нескінченних діелектриків з проникностями  $\varepsilon_1$  і  $\varepsilon_2$ . Знайти напруженість, індукцію і потенціал електричного поля у всьому просторі.

**Знаходження розподілу заряду по заданій напруженості електростатичного поля**

**1.59.** Однорідна куля радіусом  $R$  з діелектричною проникністю  $\varepsilon$  вміщується в однорідне електричне поле напруженістю  $\mathbf{E}_0$ . Знайти дипольний момент кулі та напруженість електричного поля в усьому просторі, а також розподіл зв'язаних зарядів на кулі.

**1.60.** В нескінченному діелектрику з проникністю  $\varepsilon$  створене однорідне поле напруженістю  $\mathbf{E}_0$ . В діелектрику вирізається сферична порожнина радіусом  $R$ . Знайти дипольний момент порожнини, вектор поляризації та напруженість електричного поля в усьому просторі після утворення порожнини, а також розподіл зв'язаних зарядів на поверхні порожнини.

**1.61.** (Узагальнений випадок задач 1.59 та 1.60) Однорідна куля радіусом  $R$  з діелектричною проникністю  $\varepsilon_i$  занурена в однорідний необмежений

діелектрик з діелектричною проникністю  $\varepsilon_e$ . На великій відстані від кулі в діелектрику є однорідне електричне поле  $\mathbf{E}_0$ . Знайти дипольний момент кулі, потенціал і напруженість електричного поля в усьому просторі, а також розподіл зв'язаних зарядів на поверхні кулі.

### Визначення густини поляризаційних зарядів в діелектрику та вектора поляризації

**1.62.** Металева сфера радіусом  $R$ , що несе заряд  $q$ , розташована в нескінченному однорідному діелектричному середовищі з проникністю  $\varepsilon$ . Визначити вектор поляризації в довільній точці середовища, а також густини поверхневих і об'ємних зв'язаних зарядів в діелектрику.

**1.63.** Точковий заряд  $q$  знаходиться в центрі кулі радіусом  $R$  з діелектрика з проникністю  $\varepsilon_1$ . Куля оточена безмежним діелектриком з проникністю  $\varepsilon_2$ . Знайти поверхневу густину зв'язаних зарядів на межі розділу цих діелектриків.

**1.64.** Однорідний ізотропний діелектрик з проникністю  $\varepsilon$  заповнює весь нижній півпростір. У вакуумі на відстані  $h$  від його поверхні знаходиться точковий заряд  $q$ . Визначити поверхневу густину поляризаційних (зв'язаних) зарядів в довільній точці межі, а також повний зв'язаний заряд на поверхні діелектрика. Який результат вийде, при  $\varepsilon \rightarrow \infty$ , який це має фізичний зміст?

## § 1.6. Електрична ємність. Ємність взаємна, ємності коефіцієнти

**1.65.** Конденсатор приєднано до джерела постійної напруги. Чи зміниться напруженість електричного поля в конденсаторі, якщо його заповнити діелектриком?

**1.66.** Як зміниться напруженість поля між обкладками плоского конденсатора, якщо на одній з його обкладок заряд буде збільшено вдвічі?

**1.67.** Визначити наближено взаємну ємність системи, яка складається з двох металевих куль радіусами  $R_1$  та  $R_2$ , що знаходяться на дуже великій в порівнянні з їх радіусами відстані одна від одної. Система занурена в однорідний діелектрик проникністю  $\varepsilon$ .

**1.68.** Простір між обкладинками сферичного конденсатора частково заповнено діелектриком, який розташований в середині тілесного кута  $\Omega$  з вершиною в центрі обкладок. Радіуси обкладок  $R_1$  та  $R_2$ , проникність діелектрика  $\varepsilon$ . Знайти ємність конденсатора.

**1.69.** Сферичний конденсатор з радіусами обкладок  $R_1$  та  $R_2$  заповнений діелектриком, проникність якого залежить від відстані до центра  $r$  за законом  $\varepsilon = aR_1^2/r$ , де  $a$  – деяка позитивна константа. Знайти ємність такого конденсатора.

**1.70.** В середині сферичного конденсатора з радіусами обкладок  $R_1$  та  $R_2$  діелектрична проникність змінюється за законом:

$$\varepsilon(r) = \begin{cases} \varepsilon_1, & R_1 \leq r < R, \\ \varepsilon_2, & R \leq r < R_2, \end{cases}$$

де  $R$  – деяка відстань  $R_1 < R < R_2$ .

Знайти ємність конденсатора, розподіл зв'язаних зарядів та повний заряд в діелектрику.

**1.71.** Плоский конденсатор заповнений діелектриком, проникність якого змінюється за законом  $\varepsilon = a \frac{z+d}{d}$ , де  $a$ , деяка позитивна константа,  $d$  – відстань між обкладками, вісь  $z$  – напрямлена перпендикулярно обкладкам, площа яких  $S$ . Нехтуючи крайовими ефектами, знайти ємність конденсатора та розподіл в ньому зв'язаних зарядів, якщо різниця потенціалів між обкладинками  $V$ .

**1.72.** Визначити взаємну ємність системи, яка складається із металеві кулі радіусом  $R$  і нескінченної металеві площини, яка розташована на відстані  $l$  від кулі. Вважати  $l \gg R$ .

**1.73.** Два довгих дроти радіусом  $R$  кожен, розташовані паралельно один одному. Відстань між їх осями дорівнює  $l$  ( $l \gg R$ ). Знайти взаємну ємність одиниці довжини ділянки дротів.

**1.74.** Відімкнена від джерела дводротова лінія електропередачі знаходиться в однорідному полі грозової хмари з напруженістю  $E_0 = 2$  кВ/м, яке напрямлене перпендикулярно поверхні землі. Один з дротів заземлений, інший – ізольований. Висота дротів над поверхнею  $h = 5$  м, відстань між ними  $d = 1$  м, а їх радіуси  $R = 1$  см. Знайдіть потенціал ізольованого дроту.

**1.75.** Два довгих дроти радіусом  $R$  кожен, розташовані паралельно один одному на висоті  $h$  над поверхнею Землі ( $h \gg R$ ). Відстань між їх осями дорівнює  $l$ . Знайти взаємну ємність одиниці довжини ділянки дротів.

**1.76.** В середину порожнього тонкостінного і заземленого металевого циліндра радіусом  $R$  вміщені два довгих паралельних дроти. Середина відстані між дротами співпадає з віссю циліндра. Радіус дротів  $r$ , відстань між ними  $l$ . Знайти взаємну ємність одиниці довжини лінії.



## Ємність систем конденсаторів

**1.77.** Знайти ємність нескінченного кола, яке утворене повторенням однієї і тієї ж ланки з двох однакових конденсаторів, кожен з яких має ємність  $C$  (рис. 1.11).

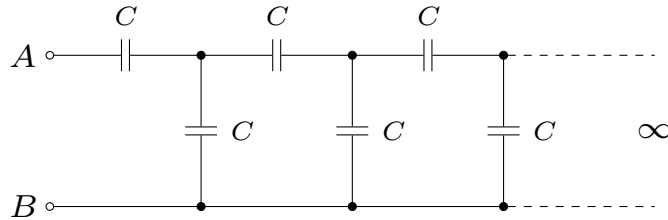


Рис. 1.11. До задачі 1.77

**1.78.** В схемі, яка наведена на рис. 1.12 знайти різницю потенціалів між точками  $A$  та  $B$ , якщо ЕРС джерела дорівнює  $\mathcal{E}$ , а відношення ємностей  $C_2/C_1 = \eta$ .

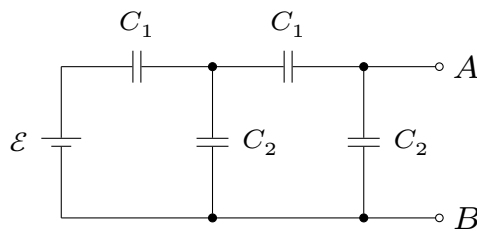


Рис. 1.12. До задачі 1.78

**1.79.** Знайти різницю потенціалів  $\varphi_A - \varphi_B$  між точками  $A$  та  $B$  системи, яка показана: а) на рис 1.13, б) на рис 1.14.

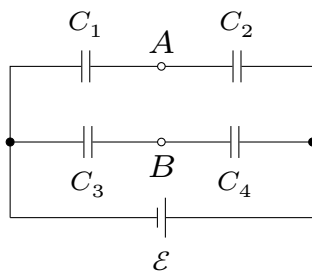


Рис. 1.13. До задачі 1.79

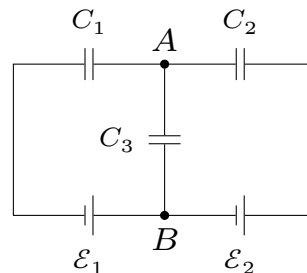


Рис. 1.14. До задачі 1.79

## § 1.7. Енергія електричного поля. Пондеромоторні сили

Енергія електричного поля:

$$W = \frac{1}{2} \int_V \rho \varphi dV + \frac{1}{2} \int_S \sigma \varphi dV,$$



де  $\rho$  та  $\sigma$  – об’ємна та поверхнева густини вільних електричних зарядів, відповідно.

Густина енергії електричного поля:

$$w = \frac{\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}}{8\pi}.$$

Енергія зарядженого конденсатора:

$$W = \frac{CV^2}{2} = \frac{q^2}{2C}.$$

Пондеромоторні (узагальнені) сили  $Q_i$ , що діють на діелектрики з боку електричного поля:

$$Q_i = \left( \frac{\partial W}{\partial q_i} \right)_{\varphi} = - \left( \frac{\partial W}{\partial q_i} \right)_q,$$

де  $q_i$  – узагальнені координати. Похідні беруться за умови постійного потенціалу (індекс  $\varphi$ ), або постійного заряду (індекс  $q$ ).

Сила, що діє на електричний диполь з боку електричного поля:

$$\mathbf{F} = (\mathbf{p} \nabla) \mathbf{E}.$$

Енергія жорсткого диполя в електричному полі:

$$W = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}.$$

Енергія квазіпружного диполя в електричному полі:

$$W = -\frac{1}{2} \mathbf{p} \cdot \mathbf{E}.$$

Сила, що діє на елемент поверхні розділу двох середовищ з боку електричного поля:

$$\mathbf{f}_{\sigma} = \frac{1}{8\pi}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)E_{\tau}^2 \mathbf{n} + \frac{1}{8\pi} \left( \frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1} \right) D_n^2 \mathbf{n},$$

де  $\mathbf{n}$  – нормаль до поверхні розділу середовищ, що напрямлена із середовища 1 в середовище 2.

Об’ємна густина пондеромоторних сил:

$$\mathbf{f} = \rho \mathbf{E} - \frac{1}{8\pi} E^2 \nabla \varepsilon + \frac{1}{8\pi} \nabla \left( E^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} \right),$$

де  $\rho$  – густина вільних електричних зарядів,  $\tau$  – густина маси речовини.

**Визначення власної енергії заданого розподілу електричного заряду і визначення енергії електростатичного поля цього розподілу заряду в заданому об’ємі**

**1.80.** Знайдіть енергію системи, яка розглянута в задачі 1.37 до і після з’єднання дротом. Поясніть результат з точки зору закону збереження енергії.

**1.81.** Система складається з двох концентричних тонких металевих оболонок з радіусами  $R_1$  і  $R_2$  і відповідними зарядами  $q_1$  і  $q_2$ . Знайти власну енергію кожної оболонки, енергію взаємодії оболонок і повну електричну енергію системи.

**1.82.** Металеву сферу із загальним зарядом  $q$  розрізали навпіл. Яку силу необхідно прикласти, щоб утримати половини разом? Сферу вважати нескінченно тонкою.

**1.83.** Як зміниться відповідь в задачі 1.82, якщо в центрі сфери помістити додатково точковий заряд  $q_0$ ?

**1.84.** Нескінченно довга тонка провідна циліндрична оболонка радіуса  $R$  розрізана уздовж осі. Визначити силу відштовхування, що діє на одиницю довжини кожної половини, якщо на одиницю довжини оболонки припадає заряд  $\lambda$ .

**1.85.** Металева сфера радіусом  $R$ , що має заряд  $q$ , занурена на половину в нескінченний ізотропний діелектрик з проникністю  $\epsilon$ . Знайти енергію електростатичного поля.

**1.86.** Центр незарядженої металевої сфери радіусом  $R$  розташований на плоскій границі двох ізотропних діелектриків з проникностями  $\epsilon_1$  і  $\epsilon_2$ . В середині сфери на відстані від її центру знаходиться точковий заряд  $q$ . Визначити енергію поля поза сферою.

**1.87.** Незаряджена металева порожня сфера, середня густина маси якої  $\rho_1$ , плаває в рідині, що має густину маси  $\rho_2$  і діелектричну проникність  $\epsilon$ . Який заряд слід надати кулі, щоб вона занурилася в рідину рівно на половину? Радіус кулі дорівнює  $R$ .

**1.88.** На скільки зміниться повна енергія металічної кулі радіусом  $R_1$  з зарядом  $q$ , якщо її оточити концентричними сферичними шарами діелектрика з діелектричною проникністю  $\epsilon$  і радіусами  $R_2$  і  $R_3$  ( $R_1 < R_2 < R_3$ ).

**Визначення енергії взаємодії системи, що складається з точкових зарядів, диполів і заряджених тіл**

**1.89.** Обчислити енергію нескінченного лінійного ланцюжку точкових зарядів, величина яких дорівнює  $q$ , а знаки чергуються. Відстань між сусідніми різнойменними зарядами дорівнює  $a$  (рис. 1.15).

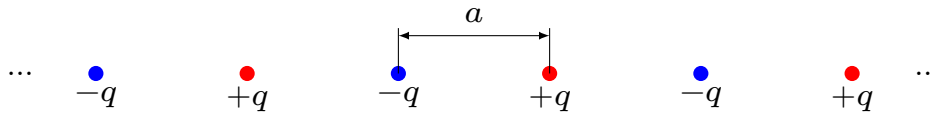


Рис. 1.15. До задачі 1.89

**1.90.** Два диполя з моментами  $\mathbf{p}_1$  і  $\mathbf{p}_2$ , які лежать в одній площині на відстані  $d$  один від одного, утворюють з прямою, яка з'єднує диполі, кути  $\theta_1$  і  $\theta_2$  відповідно (рис. 1.16). Обчислити енергію взаємодії диполів. Знайти кути, при яких енергія буде а) максимальною, б) дорівнюватиме нулю та в) мінімальною. Визначте силу взаємодії диполів виходячи з виразу для енергії взаємодії. Порівняйте результати з відповідями до задачі 1.22.

**1.91.** На відстані  $d$  від півпростору, заповненого однорідним діелектриком з проникністю  $\varepsilon$ , закріплений центр точкового диполя з дипольним моментом  $\mathbf{p}$ . Диполь може вільно обертатися, змінюючи напрямок. Паралельно межі півпростору прикладене однорідне зовнішнє електричне поле  $\mathbf{E}$  (1.17). Знайти встановлене рівноважне значення кута  $\alpha$  між напрямком векторів  $\mathbf{E}$  і  $\mathbf{p}$ .

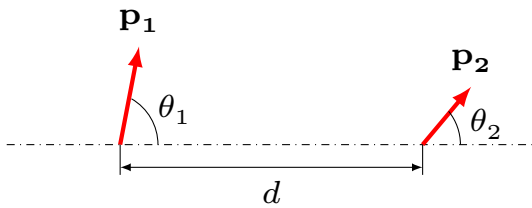


Рис. 1.16. До задачі 1.90

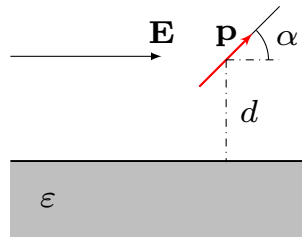


Рис. 1.17. До задачі 1.91

**Визначення сил, що діють на провідники і діелектрики в зовнішньому полі**

**1.92.** З якою силою притягуються пластини плоского конденсатора у вакуумі, заряд якого  $q$ , а площа пластин  $S$ ?

**1.93.** Знайти силу взаємодії двох однакових незаряджених металевих сфер радіусами  $R$ , вміщених в однорідне електричне поле з напруженістю  $E_0$ , яке напрямне паралельно лінії, що з'єднує центри сфер. Відстань між центрами сфер дорівнює  $l$ , причому  $l \gg R$ .

**1.94.** Плоский конденсатор занурено в ідеальну рідину з діелектричною проникністю  $\varepsilon$  і густиною  $\rho$  так, що його обкладки розташовані вертикально. Відстань між ними дорівнює  $d$ , різниця потенціалів  $V$ . Визначити висоту підняття рідини в конденсаторі.

**1.95.** Між обкладками плоского повітряного конденсатора розташована діелектрична пластина товщиною  $d_2$  з діелектричною проникністю  $\varepsilon$ , сумарна товщина повітряних зазорів між пластиною та обкладками дорівнює  $d_1$ . Різниця потенціалів між обкладками дорівнює  $V$ . Визначити силу притягання між обкладками. Площа всіх пластин дорівнює  $S$ .

**1.96.** На осі тонкого зарядженого кільця, що має радіус  $R$  і заряд  $Q$  знаходиться маленька діелектрична кулька радіусом  $r$ , матеріал якої має діелектричну проникність  $\varepsilon$ . У яких точках  $z$  на осі кільця сила, що діє на кульку буде а) мінімальною, б) максимальною, в) дорівнюватиме нулю?

**1.97.** Довгий тонкий циліндричний стрижень з однорідного ізотропного діелектрика з діелектричної проникністю  $\varepsilon$  знаходиться в однорідному електричному полі з напруженістю  $E_0$ , що утворює кут  $\alpha$  з напрямком осі стрижня. Об'єм стрижня дорівнює  $V$ . Який зовнішній момент сил слід прикласти, щоб утримати стрижень в даному положенні?

**1.98.** На осі симетрії тонкого кільця радіусом  $R$ , зарядженого зарядом  $q$ , на відстані  $z$  від його центру розташована діелектрична кулька радіусом  $r$  ( $r \ll R$ ) з діелектричною проникністю діелектрика  $\varepsilon$  (1.18). Яка сила діє на кульку?

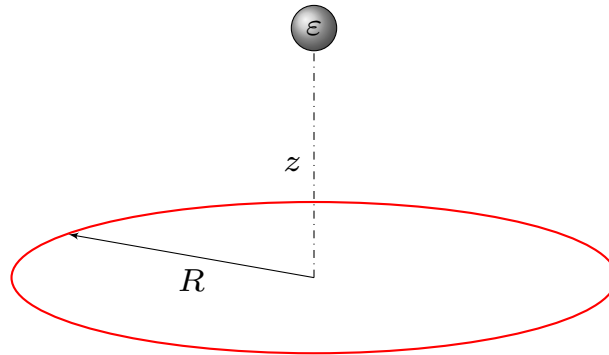


Рис. 1.18. До задачі 1.98

## Постійний струм

### § 2.1. Струми в середовищах. Закон Ома в диференціальній формі

Струм та густина струму:

$$I = \int_S \mathbf{j} d\mathbf{S}.$$

Закон Ома в диференціальній формі:

$$\mathbf{j} = \lambda \mathbf{E}.$$

Для випадку постійного струму, закон збереження електричного заряду приймає вигляд:

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = 0.$$

**2.1.** Доведіть, що при проходженні постійного струму через неоднорідний провідник, в його об'ємі виникає об'ємний вільний заряд. Від чого залежить знак цього заряду? В якому випадку об'ємного заряду не виникає?

**2.2.** Виведіть граничні умови для густини струму на межі розділу двох провідників, що мають різну електропровідність  $\lambda_1$  і  $\lambda_2$ .

**2.3.** Доведіть, що при проходженні постійного струму по провіднику, на його поверхні виникають поверхневі заряди.

*Вказівка:* Для доведення скористайтесь граничними умовами для векторів густини струму та електричної індукції.

**2.4.** На плоский конденсатор ємністю  $C$  подано постійну напругу  $V$ . Знайти струм втрат через конденсатор, якщо питомий опір однорідної речовини, якою заповнений зазор між обкладками конденсатора, дорівнює  $\rho$ , а діелектрична проникність  $\epsilon$ .

**2.5.** Простір між пластинами шаруватого плоского конденсатора заповнено багат шаровим діелектриком, що має слабку електропровідність. Діелектрична проникність і питома провідність змінюються від  $\varepsilon = 4$  та  $\lambda = 10^{-9} \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{см}^{-1}$  на одній поверхні діелектрика до  $\varepsilon = 3$  та  $\lambda = 10^{-12} \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{см}^{-1}$  на іншій його поверхні. Конденсатор включений в коло батареї постійної ЕРС. Визначити величину і знак сумарного вільного заряду  $q$ , який виникає в діелектрику, коли в колі встановиться постійний електричний струм  $I = 10^{-7} \text{ А}$ , що тече через діелектрик від сторони 1 до сторони 2.

**2.6.** Простір між пластинами плоского конденсатора заповнено двома однорідними шарами діелектрика з товщинами  $d_1$  і  $d_2$ , що слабо проводять. Діелектрична проникність і питома провідність першого діелектрика дорівнюють відповідно  $\varepsilon_1$  і  $\lambda_1$ , а другого –  $\varepsilon_2$  і  $\lambda_2$ . Знайти поверхневу густину вільних зарядів на межі між діелектриками, яка встановиться при прикладенні до конденсатора постійної напруги  $V$ .

**2.7.** Плоский конденсатор, заповнений речовиною, діелектрична проникність якої дорівнює  $\varepsilon$ , за час  $\tau$  втрачає третину наданого йому заряду. Вважаючи, що втрата заряду відбувається тільки через діелектричну прокладку, знайти питомий опір її матеріалу.

**2.8.** Обчислити опір між обкладками циліндричного конденсатора, радіус внутрішньої обкладки якого  $R_1$ , а зовнішньої –  $R_2$ . Конденсатор має довжину  $l \gg R_2$  і заповнений діелектриком з проникністю  $\varepsilon$  і електропровідністю  $\lambda$ . Знайдіть ємність такого конденсатора

**2.9.** Між двома концентричними сферами з ідеального провідника, знаходиться речовина з питомим опором  $\rho$  і діелектричною проникністю  $\varepsilon$ . Визначити опір такого шару, якщо його внутрішній радіус дорівнює  $R_1$ , а зовнішній –  $R_2$ . Розгляньте випадок  $R_2 \rightarrow \infty$ .

**2.10.** Показати, що опір однорідного провідного середовища, що заповнює весь простір між двома металевими оболонками довільної форми, дорівнює  $\frac{\rho}{4\pi C}$ , де  $\lambda$  – питома провідність середовища, а  $C$  – взаємна ємність цієї системи в вакуумі.

**2.11.** Дві металеві кулі радіусами  $r_1$  та  $r_2$  занурені в однорідне середовище з питомим опором  $\rho$ . Чому дорівнює опір середовища між кулями? Визначити взаємну ємність цих куль. Вважати, що відстань між кулями набагато більша за їх радіуси.

**2.12.** Коло постійного струму складається з довгої однопровідної лінії, в яку увімкнено джерело з ЕРС  $\mathcal{E}$ . Лінія замикається через Землю,

в яку зариті дві металеві кулі розташовані на великій відстані одна від одної (рис. 2.1). Відомі радіуси куль  $r_1$  та  $r_2$ , а також провідність ґрунту  $\lambda_1$  і  $\lambda_2$  в місцях, де вони закопані. Нехтуючи усіма опорами, крім опору заземлення, визначити заряд кожної кулі.

**2.13.** Фундамент металевої опори виконано із матеріалу, який добре проводить струм і має вигляд півсфери діаметром  $D = 2$  м (рис. 2.2). Ґрунт навколо фундаменту має провідність  $\lambda = 2 \cdot 10^{-4}$  См/см і є заземленням. Знайти опір заземлення і крокову напругу на відстані  $r = 5$  м від центру опори при замиканні на опору дроту напругою  $V = 10$  кВ. Довжина кроку людини  $l = 0.7$  м.

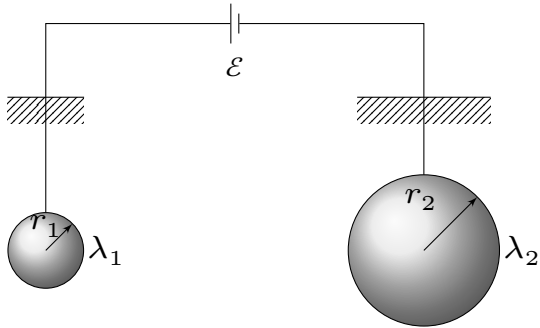


Рис. 2.1. До задачі 2.12

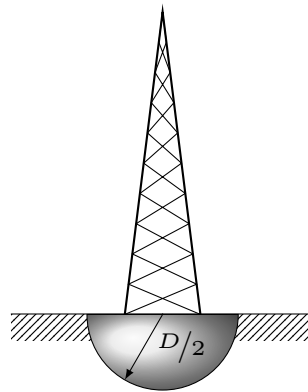


Рис. 2.2. До задачі 2.13

**2.14.** В нескінченному середовищі з провідністю  $\lambda_e$ , знаходиться сферична краплина радіусом  $R$ , провідність якої  $\lambda_i$ . На далекій відстані від краплини тече струм густиною  $\mathbf{j}_0$ . Знайти дипольний момент краплини, результуючий розподіл струму в середовищі та розподіл зарядів на поверхні краплини.

**2.15.** В нескінченному середовищі з провідністю  $\lambda$ , по якому йшов струм  $\mathbf{j}_0$ , виникла сферична порожнина радіусом  $R$ . Знайти результуючий розподіл струму в середовищі.

## § 2.2. Електричні кола. Правила Кірхгофа

**2.16.** Три гальванічні елементи з ЕРС  $\mathcal{E}_1$ ,  $\mathcal{E}_2$ ,  $\mathcal{E}_3$  і внутрішніми опорами  $r_1$ ,  $r_2$  і  $r_3$  з'єднані за схемою, показаною на рис. 2.3. Опором з'єднувальних провідників можна знехтувати. Яку напругу  $V$  буде показувати вольтметр, увімкнений так, як вказано на цьому рисунку? Чому дорівнюватимуть покази вольтметра, якщо величини  $\mathcal{E}_i$  та  $r_i$  пов'язані співвідношеннями  $\frac{\mathcal{E}_1}{r_1} = \frac{\mathcal{E}_2}{r_2} = \frac{\mathcal{E}_3}{r_3}$ ?

**2.17.** У схемі, зображений на 2.4, задані опори  $R_1$  і  $R_2$ . Визначити опір  $R$ , при якому потужність, що розсіюється на ньому буде максимальною. Яка умова того, що струм, який проходить через опір  $R$ , дорівнюватиме нулю?

**2.18.** Знайти різницю потенціалів  $\varphi_A - \varphi_B$  між точками  $A$  та  $B$  схеми, що зображена на рис. 2.5, якщо  $R_1 = 10$  Ом,  $R_2 = 20$  Ом,  $\mathcal{E}_1 = 5$  В і  $\mathcal{E}_2 = 2$  В. Внутрішніми опором джерел живлення можна знехтувати.

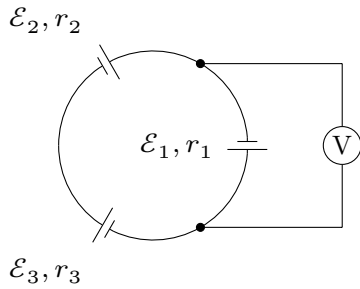


Рис. 2.3. До задачі 2.16

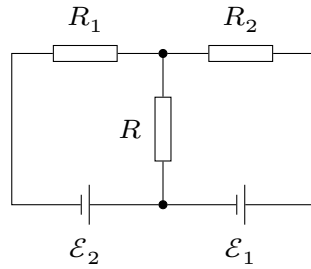


Рис. 2.4. До задачі 2.17

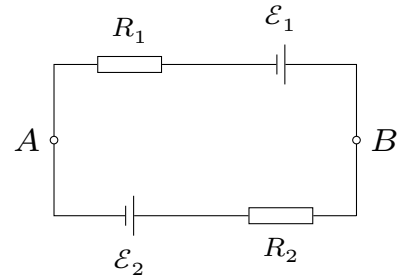


Рис. 2.5. До задачі 2.18

**2.19.** Точність вимірювання опорів містком Уїтстона найбільша, коли опори сусідніх плечей однакові, тобто, коли  $R_1 = R_2$  (рис. 2.6). Довести це для випадку, коли опір гальванометра дуже великий, в цьому випадку струмом через гальванометр можна знехтувати.

**2.20.** На телеграфній однопровідній лінії є пошкодження з певним опором заземлення  $r$  (рис. 2.7) Показати, що струм  $I$  на приймаючому кінці лінії буде найменшим в тому випадку, коли пошкодження сталося в середині лінії. Опір приймального апарату малий в порівнянні з опором всієї лінії.

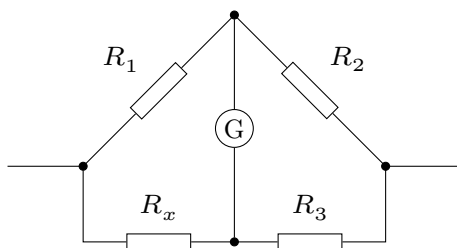


Рис. 2.6. До задачі 2.19

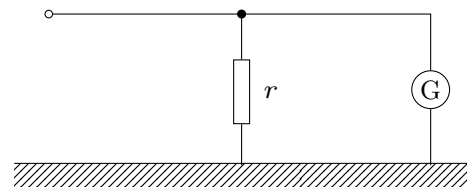


Рис. 2.7. До задачі 2.20

**2.21.** Знайти опір  $R_{AB}$  між точками  $A$  та  $B$  нескінченного кола (рис. 2.8).

**2.22.** Між точками  $A$  та  $B$  кола (рис. 2.9) підтримують напругу  $V = 20$  В. Знайти струм та його напрямок на ділянці 1–2, якщо  $R_1 = 5$  Ом і  $R_2 = 10$  Ом.



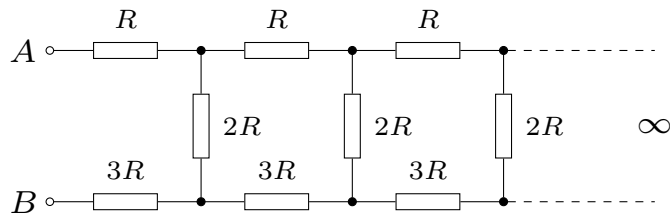


Рис. 2.8. До задачі 2.21

**2.23.** В схемі (рис. 2.10) знайти опір між точками між точками  $A$  та  $B$ , якщо  $R_1 = 100$  Ом и  $R_2 = 50$  Ом.

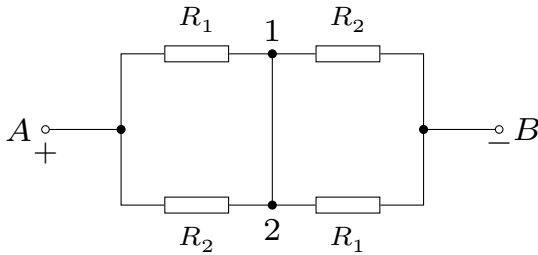


Рис. 2.9. До задачі 2.22

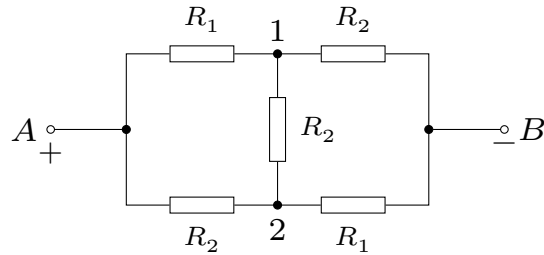


Рис. 2.10. До задачі 2.23

## § 2.3. Закон Джоуля-Ленца

Закон Джоуля-Ленца в диференціальній формі:

$$w = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E},$$

де  $ws$  – теплова потужність, що виділяється в одиниці об'єму провідника при проходженні струму.

**2.24.** Є  $n$  ідеально провідних тіл у вакуумі з зарядами  $q_1, q_2, \dots, q_n$  і потенціалами  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ . Яка кількість теплоти буде виділятися щосекундно, якщо простір між цими тілами заповнити однорідною рідиною з питомою провідністю  $\lambda$  і діелектричною проникністю  $\epsilon$ , а потенціали тіл підтримувати сталими?

**2.25.** Простір між обкладками циліндричного конденсатора довжиною  $l$  заповнено речовиною з питомим опором  $\rho$  і діелектричною проникністю  $\epsilon = 1$ . Визначити теплову потужність струму, що виділяється в конденсаторі, якщо напруга між його обкладками  $V$ , радіуси обкладок  $R_1$  і  $R_2$ . Крайовими ефектами знехтувати.

**2.26.** Простір між обкладками сферичного конденсатора радіусами  $R_1$  і  $R_2$  заповнено провідним середовищем з провідністю  $\lambda$  і діелектричної проникністю  $\epsilon$ . У початковий момент часу внутрішній обкладці надали заряд  $q$ . Знайти кількість, теплоти, що при цьому виділилося.

**2.27.** Зазор між обкладинками плоского конденсатора товщиною  $d$  заповнений послідовно двома діелектричними шарами однакової товщини. Питомі опору шарів відповідно дорівнюють  $\rho_1$  і  $\rho_2$ , діелектрична проникність  $\varepsilon = 1$ . Площа обкладок  $S$ . На конденсатор подано напругу  $V$ . Знайти потужність, що виділяється в кожному шарі.

**2.28.** Провідна куля знаходиться в середовищі з заданою провідністю  $\lambda_e$ . Густина струму далеко від кулі однорідна. При якому значенні провідності кулі  $\lambda_i$  в ній виділяється найбільша потужність?

## Магнітостатика

### § 3.1. Магнітне поле. Закон Біо-Савара-Лапласа. Теорема про циркуляцію

Індукція магнітного поля в точці з радіус-вектором  $\mathbf{r}$ , що створена сукупністю зарядів, які розташовані в точках  $\mathbf{r}_i$  визначається законом Біо-Савара-Лапласа:

$$\mathbf{B} = \int_V \frac{\mathbf{j} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) dV}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3}.$$

Теорема про циркуляцію вектора  $\mathbf{B}$  (у вакуумі):

$$\oint_L \mathbf{B} d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} \int_V \mathbf{j} dV.$$

### Визначення характеристик магнітного поля розподілів струмів, які мають певну симетрію

**3.1.** Виходячи з закону Біо-Савара-Лапласа показати, що для довільного замкненого контуру, по якому тече струм  $I$  напруженість магнітного поля в деякій точці виражається формулою  $\mathbf{H} = -\frac{I}{c} \nabla \Omega$ , де  $\Omega$  – тілесний кут, під яким контур видно з цієї точки.

**3.2.** По провіднику, який має форму еліпса, тече струм  $I$ . Велика і мала піввісі еліпса дорівнюють  $a$  та  $b$  відповідно. Визначити індукцію магнітного поля в фокусі еліпса.

**3.3.** Знайти поле на осі і в центрі колового витка радіусом  $R$ , по якому тече струмом  $I$ . Використовуючи отриманий результат, знайти: а) поле на осі круглого соленоїда в точці, з якої його краї видно під кутами  $\alpha_1$  та  $\alpha_2$ , б) поле на кінці напівнескінченного соленоїда, в) поле в середині нескінченного соленоїда. Число витків на одиницю довжини соленоїда дорівнює  $n$ .

**3.4.** Знайти магнітне поле на осі рівномірно зарядженого диска радіусом  $R$  (повний заряд диска дорівнює  $q$ , що обертається навколо осі з кутовою швидкістю  $\omega$  на відстані  $z$  від диска.

**3.5.** Нескінченно довгий циліндричний дрот складається з двох коаксіальних циліндрів. Внутрішній суцільний циліндр, виготовлений з немагнітного матеріалу і має радіус  $R_1$ . Радіус зовнішнього пустотілого циліндра дорівнює  $R_2$ . Уздовж циліндрів течуть постійні струми однакової величини  $I$ , але спрямовані протилежно. Визначити залежність величини індукції магнітного поля від відстані до осі дроту.

**3.6.** В середині довгого прямого дроту круглого перерізу є довга кругла циліндрична порожнина, вісь якої паралельна осі проводу і зміщена щодо неї на відстань  $d$  (рис. 3.1). По дроту тече постійний струм густиною  $j$ , рівномірно розподілений за перерізом. Нехтуючи впливом речовини дроту, визначити величину індукції магнітного поля всередині порожнини.

**3.7.** Уздовж довгої тонкостінної циліндричної трубки радіуса  $R$  тече постійний струм  $I$ . У стінці трубки є тонка щілина ширини  $d$ , паралельна осі трубки (рис. 3.2). Визначити величину індукції магнітного поля в точці, що лежить всередині трубки на її радіусі, якщо відстань від середини щілини до даної точки дорівнює  $r$  ( $R \gg d$ ).

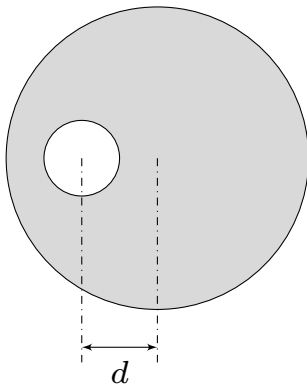


Рис. 3.1. До задачі 3.6

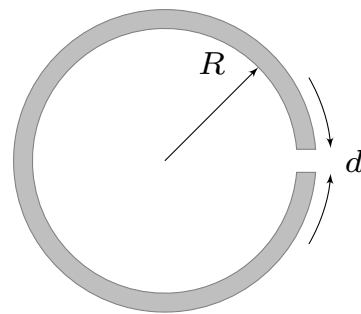


Рис. 3.2. До задачі 3.7

**3.8.** Нескінченно довгий діелектричний циліндр радіусом  $R$  радіально поляризований таким чином, що поляризованість визначається законом  $\mathbf{P} = ar$ , де  $a$  – позитивна константа. Циліндр обертається з постійною кутовою швидкістю  $\omega$  навколо своєї осі. Визначити магнітне поле в залежності від відстані до осі в середині та зовні циліндра.

**3.9.** Прямолінійна нескінченно довга смуга має ширину  $a$ . Вздовж смуги тече струм  $I$  рівномірно розподілений по її ширині. Знайти магнітне поле.

## § 3.2. Поняття ротора. Теорема Стокса. Магнітний момент. Векторний потенціал

Зв'язок вектора індукції магнітного поля з вектор-потенціалом:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}.$$

Диференціальне рівняння для вектор-потенціалу:

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}.$$

Розв'язком цього рівняння є вектор-потенціал в точці з радіус-вектором  $\mathbf{r}$ , що створена сукупністю зарядів, які розташовані в точках  $\mathbf{r}_i$ :

$$\mathbf{A} = \int_V \frac{\mathbf{j} dV}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}.$$

Вектора магнітного моменту:

$$\mathbf{p}_m = \frac{1}{2c} \int_V \mathbf{r} \times \mathbf{j} dV,$$

Вектор-потенціал поля магнітного диполя:

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{p}_m \times \mathbf{r}}{r^3}.$$

Магнітне поле диполя:

$$\mathbf{B} = \frac{3(\mathbf{p}_m \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{p}_m}{r^3}.$$

## Визначення магнітного поля створеного магнітними диполями

**3.10.** Показати, що з означення вектора магнітного моменту:

$$\mathbf{p}_m = \frac{1}{2c} \int_V \mathbf{r} \times \mathbf{j} dV,$$

для випадку колового витка зі струмом  $I$  площею  $S$  впливає формула:

$$\mathbf{p}_m = \frac{1}{c} I S \mathbf{n},$$

де  $\mathbf{n}$  — вектор нормалі до поверхні  $S$ .

**3.11.** Для умов задачі 3.4 знайти магнітне поле за умови  $z \gg R$  та виразити його через магнітний момент диска.

**3.12.** Знайти магнітний момент однорідно зарядженої сфери (кулі) радіусом  $R$ , яка має повний заряд  $q$  і обертається навколо одного зі своїх діаметрів з кутовою швидкістю  $\omega$ . Визначити гіромагнітне відношення для обох випадків, якщо маса сфери (кулі) дорівнює  $m$ .

### Задачі на знаходження та використання поняття векторного потенціалу

**3.13.** Знайти вектор-потенціал всередині і поза межами нескінченно довгого соленоїда радіусом  $R$ , по якому протікає струм, який створює однорідне магнітне поле з індукцією  $\mathbf{B}$ . Покласти  $\mathbf{A} = 0$  на осі соленоїда.

**3.14.** Використовуючи вираз для вектор-потенціалу  $\mathbf{A} = \frac{\mathbf{p}_m \times \mathbf{r}}{r^3}$ , що створюється магнітним диполем  $\mathbf{p}_m$ , показати, що магнітне поле диполя виражається формулою:

$$\mathbf{B} = \frac{3(\mathbf{p}_m \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{p}_m}{r^3}.$$

*Вказівка:* скористайтесь формулами векторного аналізу (Додаток А, формула (25)).

**3.15.** Уздовж осі довгого кругового циліндра радіусом  $R$  тече струм з постійною густиною  $\mathbf{j}$ . Знайти вектор-потенціал магнітного поля в залежності від відстані  $r$  до осі циліндра.

**3.16.** У сферичних координатах компоненти вектора  $\mathbf{j}$  середньої об'ємної густини орбітального струму, що тече в збудженому атомі водню, дорівнюють:

$$j_r = j_\theta = 0, \quad j_\varphi = \frac{1}{2 \cdot 3^8} \frac{e \hbar r^3}{\pi m a^7} e^{-\frac{2r}{3a}} \sin^3 \theta.$$

де  $a$  – борівський радіус,  $\hbar$  – постійна Планка,  $m$  і  $e$  – маса і заряд електрона, а  $r$  – відстань до протона. Орбітальний струм створює в просторі магнітне поле. Знайти індукцію цього магнітного поля в центрі атома.

**3.17.** Середня густина заряду електронної хмари в атомі водню дорівнює  $\rho = \frac{e}{\pi a^3} e^{-\frac{2r}{a}}$ , де  $a$  – борівський радіус,  $r$  – відстань до протона, а  $e$  – заряд електрона. Якщо помістити атом у зовнішнє однорідне магнітне поле з індукцією  $\mathbf{B}_0$ , то електронна хмара почне обертатися, що в свою чергу утворить в просторі струм з об'ємною густиною  $\mathbf{j} = \frac{e\rho}{2mc} \mathbf{r} \times \mathbf{B}_0$ , де  $m$  – маса електрона. На яку величину  $\Delta \mathbf{B}$  зміниться індукція магнітного поля в центрі атома внаслідок обертання електронної хмари?

**3.18.** Сфера радіусом  $R$ , що заряджена рівномірно з поверхневою густиною  $\sigma$  обертається з кутовою швидкістю  $\omega$  навколо одного зі своїх діаметрів. Знайдіть вектор-потенціал та магнітне поле в середині та зовні сфери як функцію  $\mathbf{r}$ . Запишіть отримані вирази через магнітний момент.

**3.19.** Знайти вектор-потенціал нескінченного провідника по якому тече струм  $I$ .

**3.20.** Вздовж осі провідника товщиною  $d$ , вигнутого в формі напівциліндра радіусом  $R$  ( $R \gg d$ ), тече струм з постійною густиною  $j$ . Знайти векторний потенціал на площині, що розташована уздовж осі напівциліндра і спирається на його краї.

### § 3.3. Магнітне поле у речовині. Граничні умови

Теорема про циркуляцію для вектора  $\mathbf{B}$  в речовині:

$$\oint_L \mathbf{B} d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} \left( \int_V \mathbf{j} dV + \int_V \mathbf{j}' dV \right),$$

де  $\mathbf{j}$  – густина струмів провідності,  $\mathbf{j}'$  – густина молекулярних струмів.

Теорема про циркуляцію для вектора намагнічування  $\mathbf{M}$ :

$$c \oint_L \mathbf{M} d\mathbf{l} = \int_V \mathbf{j}' dV.$$

Диференціальна форма:

$$c \nabla \times \mathbf{M} = \mathbf{j}'.$$

Означення вектора напруженості магнітного поля:

$$\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}$$

Теорема про циркуляцію для вектора  $\mathbf{H}$ :

$$\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} \int_V \mathbf{j} dV.$$

Зв'язок між вектором намагнічування та вектором напруженості магнітного поля, яке зумовило намагнічування (у випадку ізотропних магнетиків):

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H},$$

де  $\chi_m$  – магнітна сприйнятливість магнетика.

$$\mu = 1 + 4\pi\chi_m,$$

магнітна проникність магнетика.

Граничні умови для векторів  $\mathbf{B}$  та  $\mathbf{H}$ :

$$B_{1n} = B_{2n},$$

$$H_{2\tau} - H_{1\tau} = \frac{4\pi}{c} i$$

$i$  – поверхневий струм провідності, який тече по границі розділу середовищ.

## Визначення характеристик магнітного поля в присутності магнетиків з заданою намагніченістю

**3.21.** В якому випадку  $\nabla \cdot \mathbf{H} \neq 0$ ?

**3.22.** Нескінченно довгий непровідний циліндр має однорідну намагніченість, яка напрямлена вздовж осі циліндра. Знайти магнітну індукцію і напруженість магнітного поля всередині і зовні циліндра. Чому дорівнює об'ємна та поверхнева густина струмів намагнічування.

**3.23.** Нескінченно довгий непровідний циліндр радіусом  $R$  намагнічений таким чином, що намагніченість визначається законом  $\mathbf{M} = ar^2 \mathbf{e}_\varphi$ , де  $r$  – відстань від осі циліндра. Визначити індукцію та напруженість магнітного поля в залежності від відстані до осі в середині та зовні циліндра.

**3.24.** Куля радіуса  $R$  має однорідну намагніченість  $\mathbf{M}$ . Знайти магнітну індукцію і напруженість магнітного поля всередині і зовні кулі.

**3.25.** Тонке тороїдальне осердя радіусом  $R$  з намагніченістю  $\mathbf{M}$  має зазор розміром  $d$  ( $d \ll R$ ) (рис. 3.3). Нехтуючи розсіюванням магнітного поля на краях зазору, визначити напруженість та індукцію поля в осерді та зазорі.

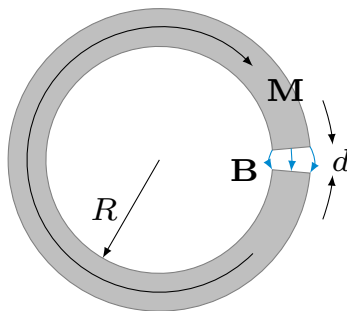


Рис. 3.3. До задачі 3.25

## Визначення характеристик магнітного поля в присутності лінійних магнетиків

**3.26.** Постійний струм  $I$  тече вздовж довгого циліндричного дроту круглого перерізу. Дріт виготовлений з парамагнетика сприйнятливістю  $\chi$ . знайти: а) поверхневий молекулярний струм; б) об'ємний молекулярний струм. Як ці струми напрямлені один відносно одного?

**3.27.** Довгий соленоїд заповнений неоднорідним парамагнетиком, сприйнятливість якого залежить тільки від відстані до осі соленоїда як  $\chi = ar^2$ , де  $a$  – додатна постійна. На осі соленоїда індукція магнітного поля дорівнює  $\mathbf{B}_0$ . Знайти залежність від  $r$ : а) намагніченості магнетика; б) густини молекулярного струму в магнетик.



**3.28.** Нескінченно довгий соленоїд, що має  $n$  витків на одиницю довжини і по якому тече струм  $I$  заповнений магнетиком з сприйнятливістю  $\chi$ . Знайдіть напруженість та індукцію магнітного поля у всьому просторі. Визначте величину і напрямок поверхневого струму намагніченості, який тече по поверхні магнетика. В якому випадку поверхневий струм буде протилежний напрямку до  $I$ ?

**3.29.** Нескінченний прямолінійний однорідний дріт радіусом  $R$ , виготовлений з матеріалу, який має магнітну проникність  $\mu_1$ , знаходиться в непровідному нескінченному однорідному середовищі з магнітною проникністю  $\mu_2$ . По дроту тече постійний струм  $I$ . Знайти напруженість поля, магнітну індукцію, намагніченість, об'ємну і поверхневу густини молекулярних струмів всередині дроту і зовні як функції радіальної координати  $r$ .

**3.30.** Прямий тонкий нескінченно довгий циліндр малого радіусу  $R$ , по якому тече струм  $I$ , лежить на поверхні плоского непровідного однорідного магнетика з магнітною проникністю  $\mu$ , що займає половину простору. Знайти намагніченість, магнітну індукцію, напруженість і молекулярні струми в усьому просторі.

**3.31.** Коаксіальний кабель складається з двох циліндричних трубок радіусами  $R_1$  та  $R_2$ , які розділені непровідним магнетиком з магнітною сприйнятливістю  $\chi$ . По трубках тече струм  $I$  в протилежних напрямках. Визначте магнітне поле в магнетику. Знайдіть струми намагнічування, які течуть на його поверхнях. Переконайтесь, що вільні струми та струми намагнічування створюють правильне значення магнітного поля.

**3.32.** Струм  $I$  тече вздовж прямого мідного провідника радіусом  $R$ . Магнітна сприйнятливість міді дорівнює  $-9.7 \cdot 10^{-6}$ . Визначте магнітне поле в міді. Знайдіть повний струм намагнічування який тече вздовж провідника.

**3.33.** Циліндричний провідник радіусом  $R$  проходить перпендикулярно через плоску межу розділу двох магнетиків з проникностями  $\mu_1$  та  $\mu_2$ . По провіднику тече постійний струм  $I$ . Знайти розподіл полів  $\mathbf{H}$  і  $\mathbf{B}$  у всьому просторі.

**3.34.** В однорідне магнітне поле  $\mathbf{B}_0$  вноситься куля радіуса  $R$  з магнітною проникністю  $\mu_i$ . Знайдіть магнітний момент кулі, магнітне поле  $\mathbf{B}$  в усьому просторі та розподіл струму в кулі. Магнітна проникність навколишнього середовища  $\mu_e$ .

**3.35.** Знайти магнітне поле в сферичній порожнині радіусом  $R$ , що знаходиться в зовнішньому магнітному полі  $\mathbf{B}_0$ . Магнітна проникність середовища, що оточує порожнину, дорівнює  $\mu$ .

## Визначення характеристик магнітного поля в присутності нелінійних магнетиків

**3.36.** Постійний магніт має вигляд кільця з вузьким поперечним зазором шириною  $d$ . Середній радіус кільця  $R$  ( $R \gg d$ ) (рис. 3.4а). Залишкова намагніченість матеріалу магніту  $M_r$ , його коерцитивна сила  $H_c$ . Вважаючи, що залежність  $M(H)$  на ділянці від  $H_c$  до нуля (рис. 3.4б) є лінійною і розсіювання магнітного поля на краях зазору немає, знайти індукцію магнітного поля в зазорі.

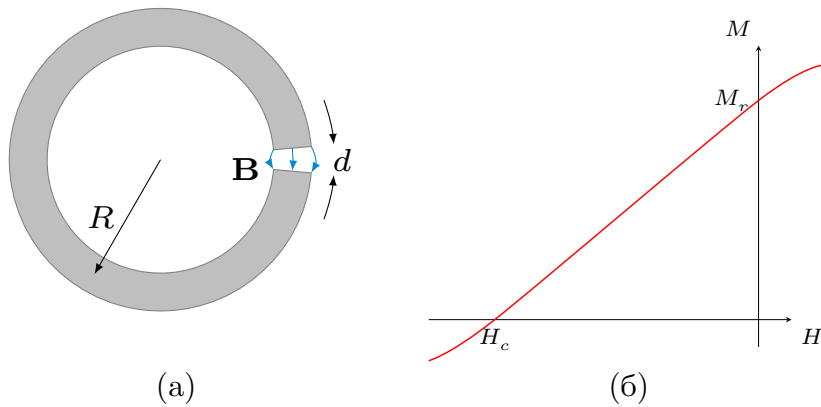


Рис. 3.4. До задачі 3.36.

**3.37.** Феромагнітний матеріал має залишкову намагніченість  $M_0 = 500$  Гс, а коерцитивну силу  $H_0 = 500$  Е. Крива намагніченості є чвертю кола (рис. 3.5б). Із цього матеріалу виготовлено постійний магніт, що має вигляд тора квадратного перерізу з поперечним розрізом. Внутрішній радіус тора  $R_1 = 1.5$  см, зовнішній –  $R_2 = 2.5$  см, ширина розрізу  $d = 0.5$  см (рис. 3.5а). Нехтуючи розсіюванням магнітного поля на краях зазору, визначити величину магнітного поля в зазорі.

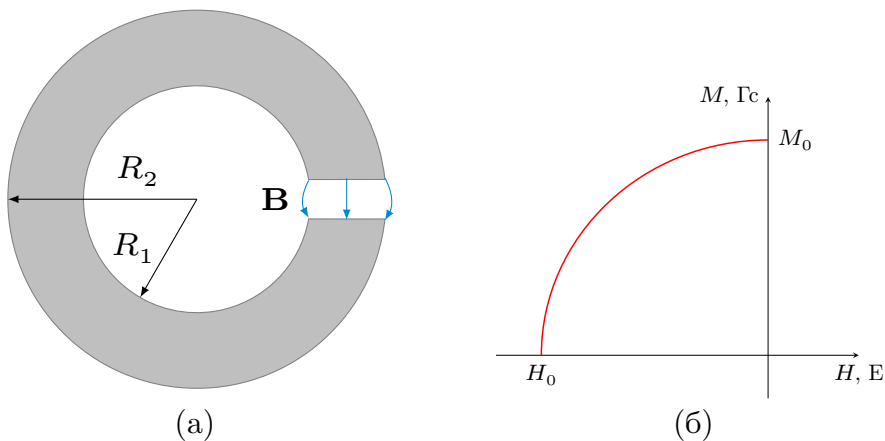


Рис. 3.5. До задачі 3.37.

**3.38.** На тонке осердя довжиною  $l$  з зазором  $d$  намотана котушка з числом витків  $N$ , по якій тече струм (рис. 3.6а). Залежність  $M(H)$  для деякого подана на рис. 3.6б. Нехтуючи розсіюванням магнітного поля на краях зазору, знайти значення сили струму, при якому настане насичення осердя. Як буде змінюватися магнітна індукція  $B$  в щілині осердя при  $I > I_0$ ? Величини  $M_0$  та  $H_0$  вважати заданими.

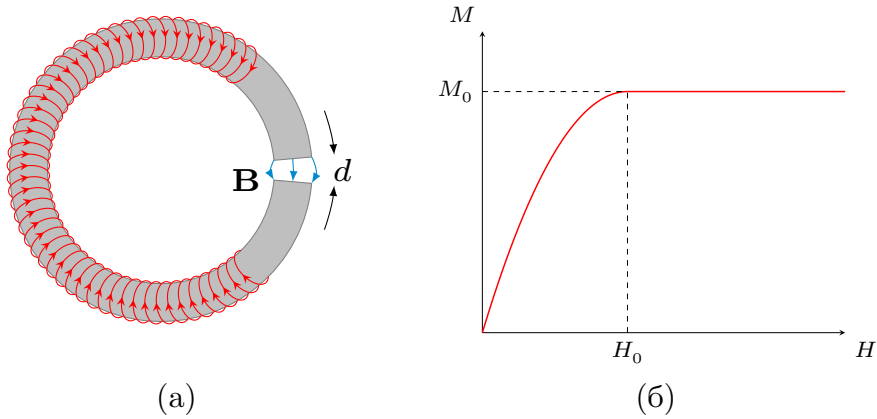


Рис. 3.6. До задачі 3.38.

**3.39.** На тонке залізне осердя довжиною  $l = 1$  м з зазором  $d = 1$  мм намотана котушка з числом витків  $N = 1600$ , по якій тече струм  $I = 1$  А (рис. 3.7а). Залежність  $B(H)$  заліза подана на рис. 3.7б. Нехтуючи розсіюванням магнітного поля на краях зазору, визначити робочу точку залізного осердя. Знайти його магнітну проникність для цієї точки.

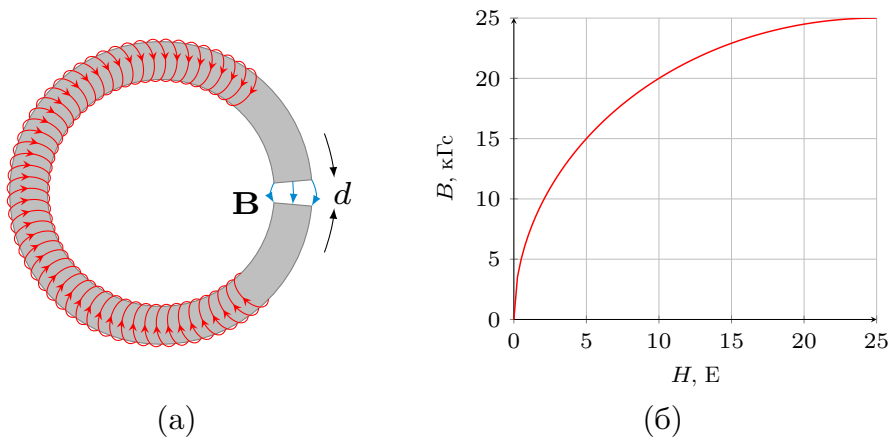


Рис. 3.7. До задачі 3.39.

## § 3.4. Взаємодія струмів з магнітним полем. Магнітний потік. Енергія та тиск поля

Сила, з якою магнітне поле діє на елемент струму (сила Ампера):

$$d\mathbf{F} = \frac{1}{c} I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}.$$

Магнітний потік:

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = \oint_L \mathbf{A} d\mathbf{l}.$$

Енергія магнітного поля струмів:

$$W = \frac{1}{c} I \Phi = \frac{1}{2c} \int_V \mathbf{A} \mathbf{j} dV.$$

Густина енергії магнітного поля:

$$w_m = \frac{\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}}{8\pi}.$$

Пондеромоторні сили (узагальнені), що діють на магнетики, або струми з боку поля:

$$Q_i = - \left( \frac{\partial W}{\partial q_i} \right)_{\Phi} = \left( \frac{\partial W}{\partial q_i} \right)_I,$$

де  $q_i$  – узагальнені координати. Похідні беруться за умови постійного потоку (індекс  $\Phi$ ), або постійного струму (індекс  $I$ ).

Магнітний потік, що пронизує магнітне поле  $i$ -го контура, що пронизує  $k$ -й контур:

$$\Phi_{ik} = \frac{1}{c} L_{ik} I_i,$$

де  $L_{ik}$  – називається коефіцієнтом самоіндукції (або індуктивністю), якщо  $i = k$ , і коефіцієнтом взаємоіндукції, якщо  $i \neq k$ , які визначаються за формулою:

$$L_{ik} = \mu \oint_{L_1} \oint_{L_2} \frac{I_i dl_i I_k dl_k}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}.$$

Сила, що діє на диполь в магнітному полі:

$$\mathbf{F} = (\mathbf{p}_m \cdot \nabla) \mathbf{B}.$$

Енергія жорсткого диполя в магнітному полі:

$$W_m = -\mathbf{p}_m \cdot \mathbf{B}.$$

Енергія квазіпружного диполя в магнітному полі:

$$W_m = -\frac{1}{2} \mathbf{p}_m \cdot \mathbf{B}.$$

Енергія магнітної взаємодії системи струмів:

$$W_m = \frac{1}{2c^2} \sum_{i,k} L_{ik} I_i I_k.$$

Густина пондеромоторних сил, що діють на речовину:

$$\mathbf{f} = \frac{1}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{B} + \frac{\mu - 1}{8\pi\mu} \nabla B^2,$$

де  $\mathbf{j}$  – густина струмів провідності в речовині.

Сила, що діє на одиницю площі поверхні розділу двох середовищ:

$$\mathbf{f}_\sigma = \frac{\mu_1 - \mu_2}{8\pi\mu_1\mu_2} B_n^2 \mathbf{n} + \frac{\mu_1 - \mu_2}{8\pi} H_\tau^2 \mathbf{n},$$

де  $\mathbf{n}$  – вектор нормалі до поверхні розділу середовищ, напрямлений від середовища 1 до середовища 2.

**3.40.** По нескінченному суцільному циліндричному провіднику радіусом  $R$  тече струм  $I$ . Знайти тиск на поверхні провідника.

**3.41.** Квадратна рамка зі стороною  $a$ , яка виготовлена з тонкого провідника, розташована в одній площині з довгим прямим провідником, по якому тече струм  $I_0$ . По рамці, в свою чергу, тече струм  $I$ , а відстань між провідником та найближчою до нього стороною рамки дорівнює  $2a$ . Визначити а) силу, яка діє на рамку з боку провідника, б) роботу сил поля при переміщенні рамки на нескінченність.

**3.42.** Дві нескінченні паралельні площини, по яких тече струм, поверхнева густина яких  $i$ , створюють в просторі між собою однорідне магнітне поле. Поза цією областю поле відсутнє. Знайти силу магнітної взаємодії, яка діє на одиницю площі кожної площини.

**3.43.** Соленоїд радіусом  $R$  і довжиною  $l$  ( $l \gg R$ ) має обмотку, що складається з  $N$  витків. По соленоїду тече струм  $I$ . У центрі соленоїда на його осі розміщена невелика котушка, яка має магнітний момент  $\mathbf{p}_m$ , і розташована перпендикулярно осі соленоїда. Визначити величину моменту сили, що діє на котушку.

**3.44.** Дротяний контур  $ABCD$  в формі квадрата (рис. 3.8) знаходиться в магнітному полі довгого тонкого стрижня з магнітним моментом одиниці об'єму  $\mathfrak{M}_0$  і перерізом  $S$ , причому північний полюс  $\mathbf{N}$  магніту знаходиться в центрі квадрата, а сам магніт перпендикулярний до площини дротяного контуру. До протилежних кінців діагоналі  $AC$  підключають джерело ЕРС, внаслідок чого по сторонам контуру йде струм сили  $I$ . Знайти момент пари сил  $M$ , що обертають контур, і його напрямок.

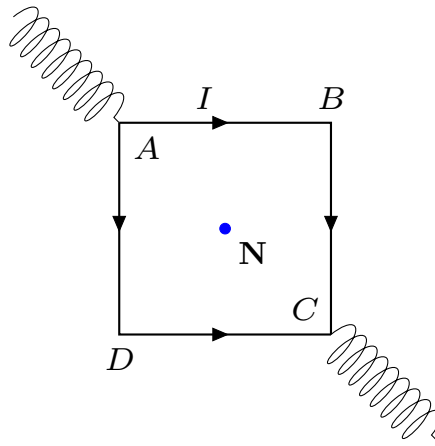


Рис. 3.8. До задачі 3.44.

**3.45.** У магнітному полі магніту задачі 3.44 поміщений круговий провідник радіусом  $R$ , по якому тече струм  $I$  за годинниковою стрілкою, якщо дивитися з боку північного полюса магніту. Магніт розташований по осі кругового струму, і його північний полюс розташований на відстані  $d$  від центру провідника. Визначити сили, що діють на провідник з боку магніту.

**3.46.** Невеликий виток зі струмом знаходиться на відстані  $r$  від довгого прямого провідника зі струмом  $I$ . Магнітний момент витка дорівнює  $\mathbf{p}_m$ . Знайти силу і момент сили, що діє на виток, якщо: а)  $\mathbf{p}_m$  паралельний прямому провіднику, б)  $\mathbf{p}_m$  напрямлений по радіусу-вектору  $\mathbf{r}$ , в)  $\mathbf{p}_m$  збігається за напрямком з магнітним полем струму  $I$  в місці розташування витка.

**3.47.** Котушку зі струмом  $I$  помістили в однорідне магнітне поле так, що її вісь співпала з напрямком поля. Обмотка котушки має один шар з мідного дроту діаметром  $d$ , радіус витків  $R$ . При якому значенні індукції зовнішнього магнітного поля обмотка котушки може бути розірвана? Межу міцності міді на розрив  $\sigma_{\max}$  вважати відомою.

### Розрахунок індуктивності провідників з просторово розподіленими струмами

**3.48.** Коаксіальний кабель складається з суцільного внутрішнього провідника радіусом  $R_1$  і тонкого зовнішнього циліндричного провідника радіусом  $R_2$ . Знайти індуктивність одиниці довжини кабелю. Вважати, що магнітна проникність матеріалу провідників і зазору між ними дорівнює  $\mu$ , струм розподілений по провідникам рівномірно.

**3.49.** По двом паралельним провідникам нескінченної довжини, які знаходяться на відстані  $2a$  один від одного тече струм  $I$ . Між ними лежить кругле провідне кільце радіусом  $a$ , яке дотикається до провідників

і ізолюване від них. Знайдіть коефіцієнт взаємної індукції між круглим провідником і двома прямими провідниками.

### Пондеромоторні сили в магнітному полі

**3.50.** На відстані  $l$  від нескінченного прямого проводу, по якому йде постійний струм  $I$ , розташована кулька радіуса  $r$  ( $r \ll l$ ), з магнітною проникністю  $\mu$ . Знайти силу, що діє на кульку.

**3.51.** Довгий соленоїд, намотаний на тонкостінний капіляр, занурений одним кінцем в парамагнітну рідину на глибину, що значно перевищує його діаметр. Густина рідини  $\rho$ , магнітна проникність  $\mu$ . На скільки підніметься рівень рідини в капілярі, якщо по соленоїду пропустити струм  $I$ ? Число витків на одиницю довжини соленоїда дорівнює  $n$ .

**3.52.** З якою силою один соленоїд втягує (виштовхує) інший. Густи-ни намотки соленоїдів та сили струмів, що течуть по ним  $n_1$ ,  $I_1$  та  $n_2$ ,  $I_2$ , відповідно. Вважати соленоїди близькими за діаметром і достатньо довгими.

**3.53.** В соленоїд, площа колового перерізу якого  $S$ , довжина  $l$  і гу-стина намотки  $n$  внесено магнетик з проникністю  $\mu$ . Знайти силу, що діє на магнетик, якщо по соленоїду тече струм  $I$ .

# Електродинаміка

## § 4.1. Закон Фарадея

### Індукція струмів в провідниках, що рухаються в магнітному полі

Рекомендується прочитати [16, Глава 16, 17].

**4.1.** Дві довгі паралельні мідні рейки, розташовані вертикально на відстані  $l$  одна від одної, замкнуті вгорі на опір  $R$  і поміщені в однорідне магнітне поле  $B$ , перпендикулярне до площини шин. Уздовж шин падає мідний провідник масою  $m$ . Тертя відсутнє. Чому дорівнює встановлене значення швидкості падіння?

**4.2.** По двом вертикальним рейкам, які з'єднані внизу опором  $R$  і вгорі батареєю з ЕРС  $\mathcal{E}$  та внутрішнім опором  $r$ , без тертя ковзає провідник довжиною  $l$  та масою  $m$  (рис. 4.1). Вся система знаходиться в однорідному магнітному полі, індукція якого  $B$  перпендикулярна до площини рисунка. Знайти максимальну швидкість провідника в полі тяжіння, нехтуючи опором рейок.

**4.3.** По двом вертикальним рейкам, які з'єднані вгорі та внизу опорами  $R$ , без тертя ковзає провідник довжиною  $l$ , масою  $m$  та опором  $R$  (рис. 4.2). Вся система знаходиться в однорідному магнітному полі, індукція якого  $B$  перпендикулярна до площини рисунка. Знайти максимальну швидкість провідника в полі тяжіння, нехтуючи опором рейок.

**4.4.** Довгий прямолінійний провідник, по якому тече струм  $I_0$ , і П-подібний провідник  $ABCD$  з рухомою перемичкою  $AB$  довжини  $l$  розташовані в одній площині. Сторона  $CD$  контуру розташована на відстані  $a$  від провідника. Перемичку переміщують із заданою постійною швидкістю  $v$  (рис. 4.3). Знайти: а) ЕРС індукції в контурі як функцію відстані від перемички до провідника, б) силу струму в контурі, якщо опір одиниці довжини всіх складових його провідників дорівнює  $r$ . Індуктивністю контура можна знехтувати.



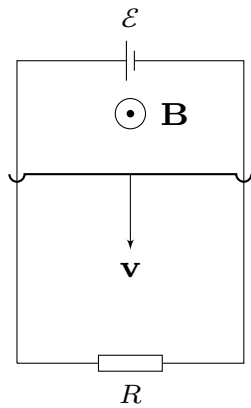


Рис. 4.1. До задачі 4.2

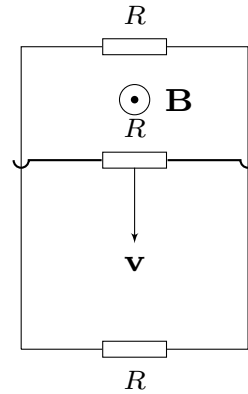


Рис. 4.2. До задачі 4.3

**4.5.** Металевий диск радіусом  $r$  обертається з кутовою швидкістю  $\omega$  навколо вертикальної осі у однорідному магнітному полі  $\mathbf{B}$ , яке перпендикулярне площині диска. Схема здійснюється шляхом підключення одного кінця резистора, опором  $R$  до осі, а іншого – до рухомого контакту, який торкається зовнішнього краю диска (рис. 4.4). Знайдіть струм у колі.

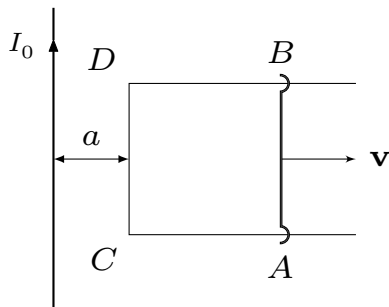


Рис. 4.3. До задачі 4.4

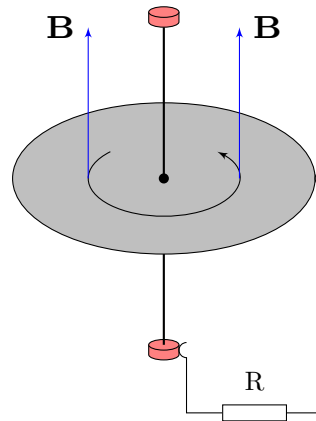


Рис. 4.4. До задачі 4.5

**4.6.** Металевий циліндр радіусом  $R$  а поміщений в однорідне постійне магнітне поле  $\mathbf{B}$ , спрямоване уздовж його осі. Циліндр обертають з постійною кутовою швидкістю  $\omega$  навколо своєї осі. Знайти: а) різницю потенціалів між поверхнею циліндра і віссю; б) поверхневу і об'ємну густини зарядів в циліндрі.

**4.7.** (Дисковий генератор Фарадея) Два диска радіусами  $R_1$  та  $R_2$  обертаються з кутовою швидкістю  $\omega$  в однорідному магнітному полі з індукцією  $\mathbf{B}$ , перпендикулярній їх площині (рис. 4.5). Центри дисків приєднані до обкладок конденсатора  $C_1$ , ободи — через ковзаючі контакти до обкладок конденсатора  $C_2$ . Знайти напруги на конденсаторах, якщо диски обертаються в одному напрямку і якщо в різних.

**4.8.** Квадратна рамка зі стороною  $a$  рухається зі постійною швидкістю в напрямку від провідника, по якому тече струм  $I$  (рис. 4.6). Відстань від провідника до лівої сторони рамки  $s(t)$ . Знайдіть ЕРС індукції, яка виникає в рамці. В якому напрямку тече струм? Визначити взаємну індуктивність системи.

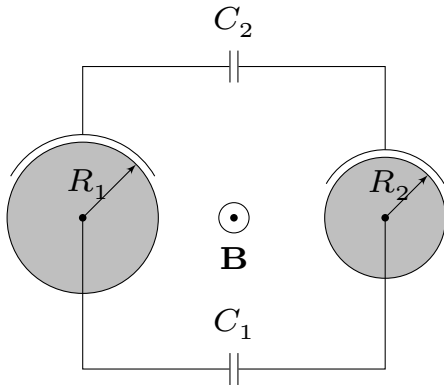


Рис. 4.5. До задачі 4.7

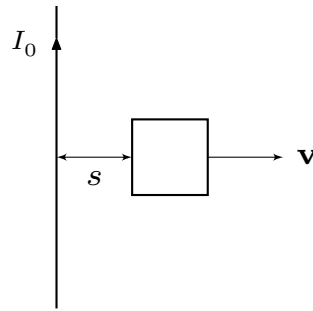


Рис. 4.6. До задачі 4.8

**4.9.** По двом мідним шинам, сполученим котушкою індуктивності  $L$ , без тертя ковзає провідник довжиною  $l$  і масою  $m$  (рис. 4.7). Система знаходиться в однорідному магнітному полі з індукцією  $\mathbf{B}$ , зображеному на рисунку. У початковий момент часу провіднику поштовхом надали швидкість  $v_0$ . Нехтуючи опором контуру, знайти закон руху провідника та закон зміни сили струму в контурі.

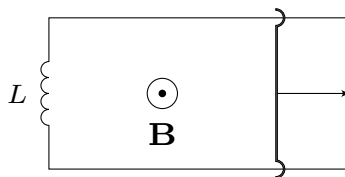


Рис. 4.7. До задачі 4.9

## Явище електромагнітної індукції

**4.10.** Електричний заряд  $q$  рівномірно розподілений по довжині твердого непровідного тонкого кругового кільця масою  $m$ . Кільце може вільно обертатися навколо своєї осі. Спочатку кільце знаходилося в спокої. Потім було увімкнено однорідне магнітне поле  $B = B(t)$ , перпендикулярне площині кільця, яке довільно змінюється у часі. Знайти кутову швидкість обертання кільця.

**4.11.** Контур є колом, з'єднаним по діаметру конденсаторами ємностями  $C_1$ ,  $C_2$  та  $C_3$ , які увімкнені в розриви провідників (рис. 4.8), і знаходиться в однорідному змінному магнітному полі. Швидкість зміни магнітного потоку через площу кільця постійний і дорівнює  $\dot{\Phi}$ . Знайти заряди конденсаторів, якщо спочатку конденсатори були не заряджені.

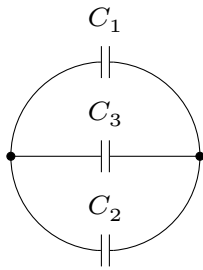


Рис. 4.8. До задачі 4.11

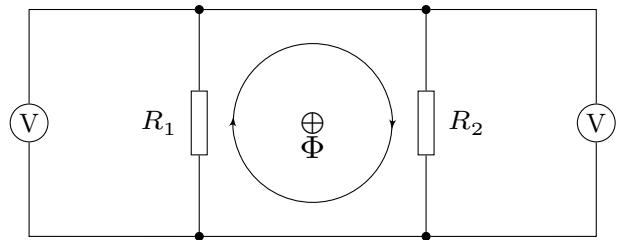


Рис. 4.9. До задачі 4.12

### Теорема взаємності

**4.13.** Знайти потік вектора індукції магнітного поля, який створюється квадратною рамкою зі стороною  $a$ , по якій тече струм  $I$ , через напівплощину, границя якої розташована на відстані  $b$  від однієї з сторін рамки (рис. 4.10).

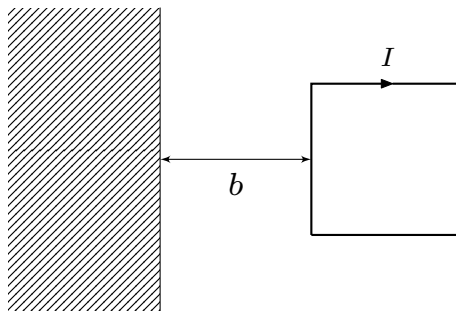


Рис. 4.10. До задачі 4.13

**4.14.** Два коаксіальних кругових витка радіусами  $R$  і  $r$  ( $r \ll R$ ) розміщені на відстані  $R$  один від одного. По малому витку пропускається струм  $i = i_0 \cos \omega t$ . Знайти струм  $I$  в великому витку, провідність якого дорівнює  $G$ .

**4.15.** Магнітний диполь з моментом  $p_m$  обертається з частотою  $\omega$  навколо осі, яка проходить через його центр і перпендикулярна магнітному моменту (рис. 4.11). Знайти струм в плоскому нерухомому кільці радіусом  $a$  з опором  $R$ , яке знаходиться на відстані  $l \gg a$  від диполя. Нормаль  $\mathbf{n}$  до площини кільця перпендикулярна осі обертання диполя. Самоіндукцією рамки знехтувати.

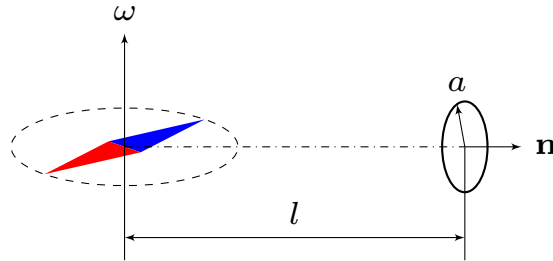


Рис. 4.11. До задачі 4.15

**4.16.** Намагнічена куля пролітає вздовж осі тонкої котушки, з'єднаної з балістичним гальванометром через ідеальний випрямляючий елемент. Куля намагнічена уздовж своєї осі, її розміри малі в порівнянні з діаметром котушки  $D$ . Визначити магнітний момент кулі  $p_m$ , якщо відомо, що гальванометр відхилився після прольоту кулі на кут  $\varphi$ . Відомі балістична постійна гальванометра  $b$  [рад/Кл], число витків котушки  $n$  і опір кола  $R$ .

## § 4.2. Надпровідники у магнітному полі

**4.17.** Надпровідна куля радіусом  $R$  вміщена в однорідне магнітне поле з індукцією  $\mathbf{B}_0$ . Знайдіть магнітний момент кулі, магнітне поле  $\mathbf{B}$  в усьому просторі та розподіл струму в кулі.

**4.18.** Надпровідна куля радіусом  $R$ , яка складається з однакових півсфер, вміщена в однорідне магнітне поле з індукцією  $B_0$ , перпендикулярне площині розрізу. Знайдіть силу, необхідну для відриву однієї півсфери від іншої.

### Закон збереження магнітного потоку для надпровідників

**4.19.** В центр надпровідного кільця індуктивністю  $L$  і радіусом  $R$  внесено магнітний диполь з дипольним моментом  $p_m$ , який направлений вздовж осі кільця. Який струм установиться в кільці?

**4.20.** Провідне кільце з індуктивністю  $L$  знаходиться в нормальному стані в зовнішньому магнітному полі (магнітний потік через контур

кільця дорівнює  $\Phi_0$ ). Потім температура знижується і кільце переходить в надпровідний стан. Який струм буде текти по кільцю, якщо вимкнути зовнішнє магнітне поле?

**4.21.** У постійному однорідному магнітному полі з індукцією  $B$  знаходиться кругле жорстке надпровідникове кільце радіусом  $R$  малого перерізу. У початковий момент площина кільця паралельна напрямку магнітного поля, а струм в кільці відсутній. Визначити силу струму в кільці відразу після того, як воно було повернуто так, що площина кільця стала перпендикулярна до ліній магнітного поля. Знайти витрачену роботу.

### Метод зображень в магнітостатиці

**4.22.** На якій висоті постійний магніт з магнітним моментом  $p_m$  і масою  $m$  буде левітувати в горизонтальному положенні над плоскою горизонтальною поверхнею надпровідника I роду? Магніт вважати точковим диполем.

**4.23.** Над плоскою поверхнею надпровідника I роду на ізолюючому шарі товщини  $h = 5$  мм лежить тонке надпровідне кільце радіусом  $R = 10$  см, по якому тече постійний струм. При якому струмі кільце почне левітувати над поверхнею надпровідника, якщо маса кільця  $m = 1$  г?

### Сили, що діють на надпровідники в магнітному полі

**4.24.** Металева надпровідна кулька летить у напрямку до соленоїда уздовж його осі. Поле соленоїда  $B_0 = 10^3$  Гс. Якою має бути початкова швидкість кульки, щоб вона змогла влетіти в соленоїд? Радіус кульки 2 см, маса 1 г.

**4.25.** Невелика надпровідна кулька радіусом  $r$  знаходиться на осі на відстані  $z$  від площини кільця радіусом  $R$ , по якому тече струм  $I$ . Знайдіть силу взаємодії між кулькою та кільцем.

**4.26.** Знайти розподіл магнітного тиску по поверхні надпровідного кулі радіусом  $R$ , що внесена в однорідне зовнішнє магнітне поле  $B_0$ .

## § 4.3. Рівняння Максвелла. Вектор Пойнтінга. Скін-ефект

### Закон електромагнітної індукції в інтегральній формі

**4.27.** Непровідне кільце масою  $m$ , яке має заряд  $q$ , може вільно обертатись навколо своєї осі. У початковий момент кільце знаходиться в стані

спокою і магнітне пол відсутнє. Потім увімкнули однорідне мгнітне поле, перпендикулярне до площини кільця, яке почало зростати за деяким законом  $\mathbf{B}(t)$ . Знайти кутову швидкість кільця в залежності від величини поля.

**4.28.** На поверхні довгого суцільного непровідного циліндра радіусом  $R$  рівномірно розподілений заряд з поверхневою густиною  $\sigma$ . Циліндр може обертатися без тертя навколо своєї осі. Зовнішнє однорідне магнітне поле з вектором індукції  $\mathbf{B}$  направлено вздовж осі циліндра. Знайти кутову швидкість обертання, яку набуде циліндр після вимикання магнітного поля. Густина маси речовини циліндра  $\rho$ , спочатку циліндр нерухомий.

**4.29.** На довгий соленоїд, через який проходить змінний струм, величина якого змінюється за законом  $I(t) = I_0 \cos \omega t$ , надітий тор з діелектрика проникністю  $\epsilon$  (рис. 4.12). У торі є дуже тонкий поперечний зазор. Знайти напруженість електричного поля в зазорі в залежності від відстані від осі соленоїда. Радіус соленоїда  $R$ , довжина  $l$ , число витків  $N$ .

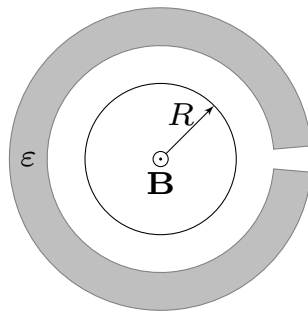


Рис. 4.12. До задачі 4.29

**4.30.** По двом паралельними нескінченним площинам, відстань між якими дорівнює  $d$  течуть однакові по модулю протилежно напрямлені струми з поверхневою густиною, яка змінюється в часі за законом  $i(t) = at$ , де  $a$  – позитивна константа. Знайти вихрове електричне.

**4.31.** У довгому соленоїді радіусом  $R$  з густиною намотування  $n$  змінюють струм з постійною швидкістю  $\dot{I}$ . Знайти модуль напруженості вихрового електричного поля  $E(r)$  як функцію відстані  $r$  від осі соленоїда.

**4.32.** Однорідно заряджений з об'ємною густиною заряду  $\rho$  нескінченний циліндр радіусом  $R$  обертається навколо своєї осі кутовою швидкістю, яка залежить від часу за законом  $\omega = kt$ . Знайти електричне та магнітне поле у всьому просторі в залежності від часу.

## Закони збереження. Вектор Пойнтінга

**4.33.** За яких умов електричний струм, об'ємна густина якого змінюється в просторі за законом  $\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \mathbf{j}_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$ , де  $\mathbf{j}_0$ ,  $\mathbf{k}$  – постійні вектори, забезпечити стаціонарний розподіл зарядів у просторі?

**4.34.** В необмежене однорідне провідне середовище вміщена металева куля, якій наданий електричний заряд. Оскільки середовище провідне, то за рахунок стікання заряду з кулі, з'являться електричні струми. Показати, що в цьому випадку магнітного поля не виникатиме.

**4.35.** По дроту радіусом  $R$ , тече постійний струм  $I$ , який рівномірно розподілений по його поперечному перерізу. Вузький розрив в дроті шириною  $d$  ( $d \ll R$ ), утворює конденсатор з паралельними пластинами. Знайдіть магнітне поле в розриві, на відстані  $s < R$  від осі.

**4.36.** Плоский конденсатор складається з двох однакових металевих дисків, простір між якими заповнено однорідним діелектриком з діелектричною проникністю  $\varepsilon$ . Відстань між внутрішніми поверхнями дисків дорівнює  $d$ . Між обкладками конденсатора підтримується змінна напруга  $V = V_0 \sin \omega t$ . Нехтуючи крайовими ефектами, знайти магнітне поле в просторі між обкладками конденсатора.

**4.37.** По прямому провіднику круглого перерізу тече постійний струм  $I$ . Знайти потік вектора Пойнтінга через бічну поверхню даного провідника, що має опір  $R$ .

**4.38.** Плоский конденсатор складається з двох круглих пластинок, які знаходяться на відстані  $d$  одна від одної, кожна радіус  $R$ . Через конденсатор тече постійний струм  $I$ , як вказано на рис. 4.13, що заряджає конденсатор. Як виглядають силові лінії електричного та магнітного поля в конденсаторі? Знайдіть вектор Пойнтінга на відстані  $r$  від центра конденсатора. Показати, що потік вектора Пойнтінга через бічну поверхню конденсатора дорівнює збільшенню його енергії за одиницю часу. Розсіюванням поля на краях при розрахунку знехтувати.

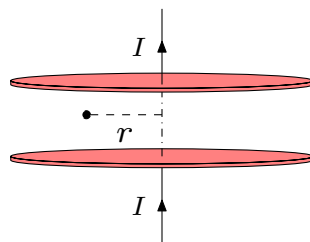


Рис. 4.13. До задачі 4.38

**4.39.** Циліндричний нерелятивістський електронний пучок радіуса  $R$  поширюється у вільному просторі. Електрони пучка летять паралельно, їхня енергія дорівнює  $W$ , а концентрація  $n$ . Знайти величину і напрямок вектора Пойнтінга в будь-якій точці простору (зовні та всередині пучка).

**4.40.** Заряджений плоский повітряний конденсатор з напруженістю електричного поля між пластинами  $282 \text{ В/см}$  поміщений всередині соленоїда, поперечний переріз якого має форму прямокутника зі сторонами, паралельними і перпендикулярними пластинам конденсатора. У колі обмотки соленоїда є батарея постійного струму і ключ. Вся система (разом з батареєю) поміщена на горизонтальних рейках, які паралельні пластинам конденсатора. Система може переміщатися по рейкам без тертя. Спочатку коло соленоїда розімкнуте. Потім ключ замикається і в соленоїді створюється постійне магнітне поле з індукцією  $2000 \text{ Гс}$ . Знайти зміну механічного імпульсу системи після замикання ключа. Об'єм повітряного простору між пластинами конденсатора дорівнює  $200 \text{ см}^3$ .



## Рух частинок в електромагнітному полі

### § 5.1. Рух заряду в електричному полі

**5.1.** Частинка з питомим зарядом  $q/m$  рухається прямолінійно під дією електричного поля  $E = E_0 - kx$ , де  $k$  — додатна постійна,  $x$  — відстань від точки, в частинка знаходилась в стані спокою в початковий момент. Знайти відстань, яку пройде частинка до зупинки.

**5.2.** Знайти траєкторію релятивістської частини що має зарядом  $q$ , початкову кінетичну енергію  $\mathcal{E}_0$  і початковий імпульсом  $p_0$ , напрямлений вздовж осі  $Ox$  в постійному однорідному електричному полі  $E$ , що протилежно осі  $Oy$ . Знайти траєкторію частинки.

### § 5.2. Рух заряду в магнітному полі

**5.3.** Релятивістська частинка зарядом  $q$  рухається в постійному однорідному магнітному полі  $B$ . Знайти закони її руху, а також радіус і частоту обертання.

**5.4.** Конічний маятник складається з кульки питомим зарядом  $q/m$ , яка підвішена на довгій нитці. Як зміниться кутова швидкість обертання маятника після увімкнення вертикального магнітного поля  $\mathbf{B}$ ? В якому випадку кутова швидкість збільшиться і в якому зменшиться?

**5.5.** З поверхні циліндричного провідника радіусом  $R$ , по якому тече постійний струм  $I$ , вилітає електрон з початковою швидкістю  $v_0$ , перпендикулярно до поверхні провідника. На яку максимальну відстань віддаляться електрон від осі провідника, перш ніж повернути назад під дією магнітного поля струму?

## § 5.3. Рух заряду в електричному та магнітному полях

**5.6.** Розглянемо частинку питомим зарядом  $q/m$ , що рухається в присутності постійних і однорідних електромагнітних полів, заданих у вигляді  $\mathbf{E} = E_0 \mathbf{e}_y$  та  $\mathbf{B} = B_0 \mathbf{e}_z$ . В початковий момент частинка знаходиться в стані спокою у початку координат. Знайти закони руху частинки. Зобразить траєкторію частинки в площині  $xOy$  для випадків  $q < 0$  та  $q > 0$ .

**5.7.** При якій початковій швидкості зарядженої частинки її траєкторія прямолінійна при русі в ортогональних електричних і магнітних полях?

**5.8.** Розв'язати задачу 5.6 для випадку, якщо електричне поле змінюється за законом  $\mathbf{E} = E_0 \cos \Omega t \mathbf{e}_y$ , де  $\Omega = \frac{qB_0}{mc}$  — циклотронна частота.

**5.9.** Розглянемо пучок іонів питомим зарядом  $q/m$ , що рухається влітають в область постійних і однорідних паралельних електромагнітних полів, заданих у вигляді  $\mathbf{E} = E_0 \mathbf{e}_y$  та  $\mathbf{B} = B_0 \mathbf{e}_y$ . з швидкістю  $\mathbf{v} = v_0 \mathbf{e}_x$ . На відстані  $l$  від точки початку координат знаходиться плоский екран, орієнтований перпендикулярно осі  $Ox$ . Знайти рівняння сліду іонів на екрані. Показати, що при  $z \ll l$  слід матиме вигляд параболи.

**5.10.** Частинка з питомим зарядом  $q/m$  знаходиться всередині соленоїда круглого перерізу на відстані  $r$  від його осі. В обмотці увімкнули струм, і індукція магнітного поля стала рівною  $B_0$ . Знайти швидкість частинки і радіус кривизни її траєкторії, якщо за час наростання струму в соленоїді її зміщенням можна знехтувати.

### Рух частинок в магнетронах

**5.11.** Магнетрон складається з довгого циліндричного анода радіусом  $a$  і коаксіального з ним циліндричного катода радіусом  $b$  ( $b < a$ ). На осі системи є нитка з струмом розжарення  $I$ , яка створює в навколишньому просторі магнітне поле. Знайти найменшу різницю потенціалів між катодом і анодом, при якій термоелектрони, що залишають катод без початкової швидкості, почнуть досягати анода.

**5.12.** Магнетрон що складається з нитки розжарення радіусом  $a$  і коаксіального циліндричного анода радіусом  $b$ , які знаходяться в однорідному магнітному полі, паралельному нитці. Між ниткою і анодом прикладена прискорююча різниця потенціалів  $V$ . Знайти значення індукції магнітного поля, при якому електрони, що вилітають з нульовою початковою швидкістю з нитки, будуть досягати анода.

## Кола змінного струму

### § 6.1. Перехідні процеси в електричних колах

**6.1.** Знайти закон зміни в часі струму, який тече через індуктивність  $L$  в схему (рис. 6.1) після замикання ключа в момент  $t = 0$ .

**6.2.** У схемі (рис. 6.2) відомі ЕРС  $\mathcal{E}$  джерела, опір  $R$  і індуктивності котушок  $L_1$  і  $L_2$ . Внутрішнім опором джерела і опором котушок можна знехтувати. Знайти струми, які встановляться в котушках після замикання ключа.

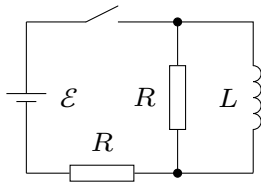


Рис. 6.1. До задачі 6.1

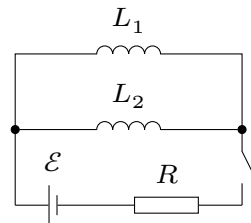


Рис. 6.2. До задачі 6.2

**6.3.** У колі, зображеному на рис. 6.3, ЕРС батареї  $\mathcal{E} = 100$  В, опори резисторів  $R_1 = 10$  Ом і  $R_2 = 6$  Ом, а ємності конденсаторів  $C_1 = 60$  мкФ і  $C_2 = 100$  мкФ. У початковому стані ключ розімкнений, а конденсатори не заряджені. Через деякий час після замикання ключа в системі встановиться рівновага. Яка кількість теплоти виділиться в колі за час встановлення рівноваги?

**6.4.** У схемі на рис. 6.4 після встановлення струмів миттєво перекидають ключ з положення 1 в положення 2. Вважаючи котушки  $L_1$  і  $L_2$  ідеальними, визначте кількість теплоти, що виділиться на резисторі  $R$ . ЕРС джерела струму  $\mathcal{E}$ , а внутрішній опір  $r$ .

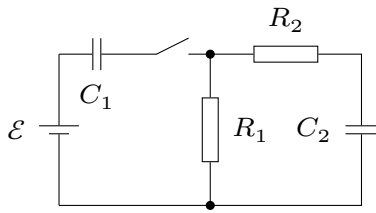


Рис. 6.3. До задачі 6.3

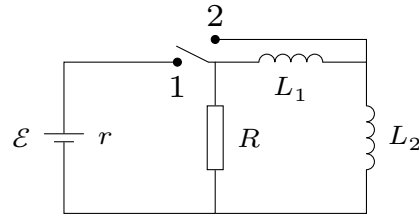


Рис. 6.4. До задачі 6.4

## § 6.2. Вільні коливання в електричних колах

**6.5.** Знайти максимальний струм в колі (рис 6.5) і максимальну напругу на конденсаторі після замикання ключа. Активним опором кола можна знехтувати.

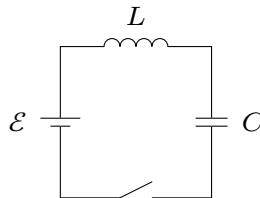


Рис. 6.5. До задачі 6.5

**6.6.** Коливальний контур містить індуктивність і ємність. В деякий момент часу з конденсатора швидко витягують пластину з діелектричною проникністю  $\epsilon$ . Як зміниться частота коливань контуру? У скільки разів зміняться максимальні величини заряду на конденсаторі і струму в котушці, якщо пластину витягують в момент, коли заряд на конденсаторі а) відсутній б) максимальний?

**6.7.** Знайти частоту згасаючих коливань контуру, який показаний показано на рис 6.6. Ємність  $C$ , індуктивність  $L$  і активний опір  $R$  вважати відомими.

**6.8.** Високодобротний коливальний контур (рис. 6.7) включає дві послідовно з'єднані котушки з індуктивностями  $L_1$  і  $L_2$ . Після того, як котушку  $L_2$  замикають накоротко, частота власних коливань контуру не змінюється. Визначити коефіцієнт взаємної індукції.

**6.9.** Визначити частоти вільних коливань у двох індуктивно зв'язаних контурах, схема яких подана на рис. 6.8. Коефіцієнт взаємної індукції контурів  $L_{12}$ .

**6.10.** Визначити моди вільних незгасаючих коливань у колі, схема якого подана на рис. 6.9.

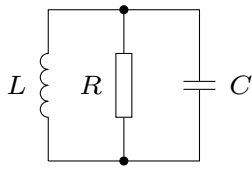


Рис. 6.6. До задачі 6.7

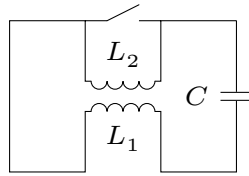


Рис. 6.7. До задачі 6.8

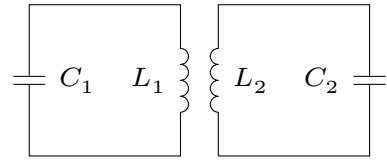


Рис. 6.8. До задачі 6.9

**6.11.** Визначити моди вільних незгасаючих коливань у колі, схема якого подана на рис. 6.10.

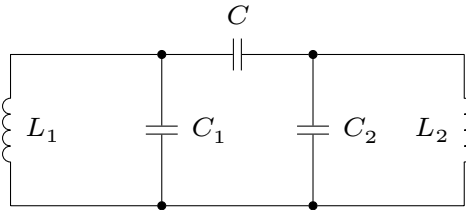


Рис. 6.9. До задачі 6.10

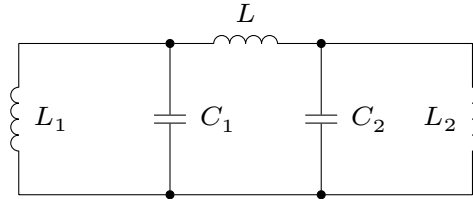

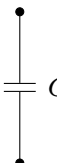
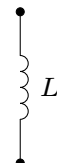


Рис. 6.10. До задачі 6.11

## § 6.3. Вимушені коливання в електричних колах. Резонанс

Елемент			
Імпеданс, $Z$	$R$	$\frac{1}{i\omega C}$	$i\omega L$

**6.12.** Знайдіть струм в колі, яке зображене на рис. 6.11, якщо ЕРС джерела змінюється за законом  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos \omega t$ . Чому буде дорівнювати струм, якщо котушки матимуть взаємну індуктивність  $M$ ?

**6.13.** В колі, зображеному на рис. 6.12, діє джерело змінної ЕРС  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos \omega t$ . При яких умовах струм в колі не залежить від частоти? Знайдіть різницю фаз між ЕРС та напругою на кінцях  $RC$ -пари за цих умов.

**6.14.** Знайти умову, при якій в схемі рис. 6.13 струм, що протікає через деяке навантаження  $Z$ , не буде залежати від нього.

**6.15.** Знайти імпеданс нескінченного кола, показаного на рис. 6.14. За яких частот коло не буде споживати потужність від джерела?

**6.16.** В колі, зображеному на рис. 6.16, діє змінна ЕРС  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos^2 \omega t$ . Визначити струми  $I_1$  та  $I$ , якщо параметри кола задовольняють співвідношенню  $\omega^2 = \frac{1}{4LC}$ .

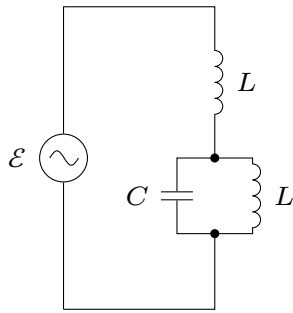


Рис. 6.11. До задачі 6.12

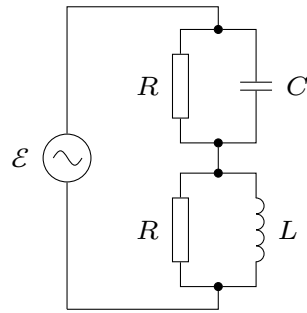


Рис. 6.12. До задачі 6.13

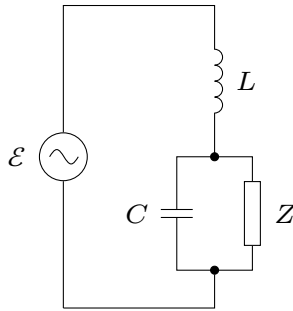


Рис. 6.13. До задачі 6.14

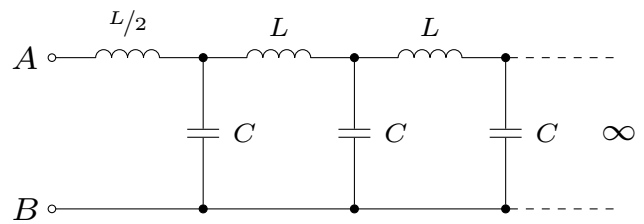


Рис. 6.14. До задачі 6.15

**6.17.** Параметри  $R$  і  $C$  схеми (рис. 6.15) задані. При якій частоті  $\omega$  вихідна напруга  $V_{\text{out}}$  буде знаходитися в фазі із вхідною напругою  $V_{\text{in}}$ ? Яким при цьому буде відношення амплітуди напруг  $V_{\text{out}}$  та  $V_{\text{in}}$ ?

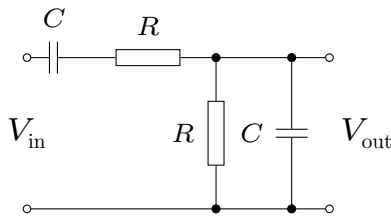


Рис. 6.15. До задачі 6.17

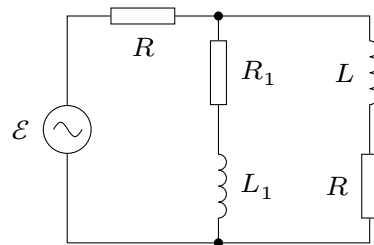


Рис. 6.16. До задачі 6.16

## Мостові схеми в колах змінного струму

**6.18.** При якому співвідношенні між параметрами моста, зображеного на рис. 6.17, напруга на його виході знаходиться в фазі з вхідною напругою  $V = V_0 \cos \omega t$ . Визначити при цьому амплітуду напруги на виході.

**6.19.** Знайти умови, при яких міст зображений на рис. 6.18, буде збалансований (тобто  $V_{\text{out}} = 0$  при подачі на його вхід періодичної напруги  $V_{\text{in}}(t)$  будь-якої форми).

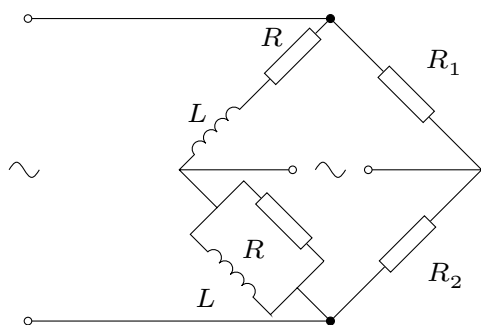


Рис. 6.17. До задачі 6.18

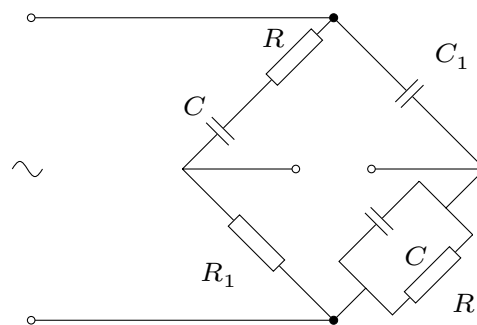


Рис. 6.18. До задачі 6.19

## Електричні фільтри

**6.20.** Знайти частоти пропускання фільтрів, зображених на рис 6.19а, 6.19б та 6.19в.

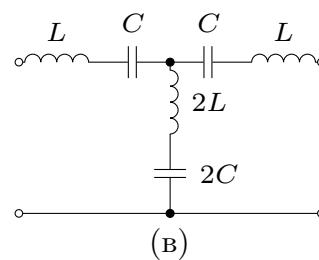
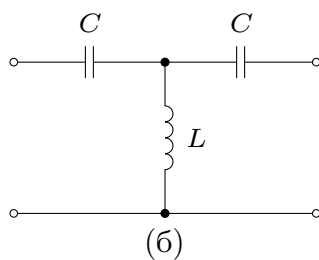
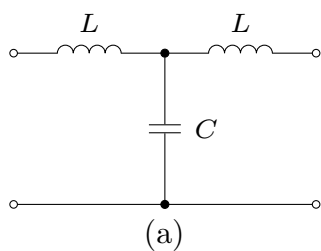


Рис. 6.19. До задачі 6.20

## Відповіді

### Електростатика

$$1.1. E_z = \begin{cases} -2\pi(\sigma + \rho d), & x < d \\ 2\pi(\sigma - \rho(d - 2x)), & 0 < x < d \\ 2\pi(\sigma + \rho d), & x > d \end{cases}$$

$$1.2. \omega = \sqrt{\frac{qQ}{mR^3}}.$$

$$1.3. E_z = 2\pi\sigma \left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}\right)$$

$$1.4. E_z = \pi\sigma.$$

$$1.5. E_z = \pi\sigma.$$

$$1.6. E_z = \frac{2\pi\sigma z}{\sqrt{R^2 + z^2}}$$

$$1.7. E_z = 2\pi\sigma$$

1.8.  $\mathbf{E} = -\frac{\pi r^2 \sigma}{R^3} \mathbf{r}$ , де  $\mathbf{r}$  — радіус-вектор з початком у центрі вирізаного отвору і кінцем у центрі сфери.

$$1.9. T = \sqrt{\frac{\pi m d}{p \rho_0}}.$$

$$1.10. E = 2\sqrt{2}\pi\sigma$$

$$1.11. \mathbf{E} = \frac{4\pi}{3}\rho\mathbf{l}$$

$$1.12. \Phi = \pi l \lambda$$

$$1.13. \Phi = 2\pi \lambda R.$$

1.14. Потік через куб  $\Phi = \frac{\pi}{2}q$ . Потік через грані, що сходяться у вершині, в якій розташований заряд  $\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi_3 = 0$ , потік через інші грані  $\Phi_4 = \Phi_5 = \Phi_6 = \frac{\pi}{6}q$ .

$$1.15. \Phi = 2\pi q \left(1 - \frac{l}{\sqrt{R^2 + l^2}}\right).$$

$$1.16. \text{а) } E = \frac{\pi\lambda_0}{R}; \text{ б) } E = \frac{\pi\lambda_0 R^2}{(z^2 + R^2)^{3/2}}.$$



**1.17.**  $\mathbf{E} = \frac{4}{3}\pi r \mathbf{a}$

**1.18.**  $q = 2\pi a R^2$

**1.19.**  $\mathbf{E} = \frac{e\mathbf{r}}{r^3} \left[1 + \frac{2r}{a} \left(1 + \frac{r}{a}\right)\right] e^{-\frac{2r}{a}}$ . При  $r \ll a$ ,  $\mathbf{E} = \frac{e\mathbf{r}}{r^3}$ , при  $r \gg a$ ,  $\mathbf{E} = \frac{2e\mathbf{r}}{a^2 r} e^{-\frac{2r}{a}}$ .

**1.20.**  $E_z = \frac{\pi q R}{2z^3}$

**1.21.**  $V = \frac{E_1}{E_2} 2\pi l^3$ .

**1.22.** а)  $F = \frac{3p_1 p_2}{d^4}$ , диполі відштовхуються, б)  $F = \frac{3p_1 p_2}{d^4}$ , диполі притягуються, в)  $F = \frac{6p_1 p_2}{d^4}$ , диполі притягуються, г)  $F = \frac{6p_1 p_2}{d^4}$ , диполі відштовхуються.

**1.23.** Вказівка: Сила, що діє на диполь в неоднорідному магнітному полі визначається за формулою  $\mathbf{F} = (\mathbf{p} \cdot \nabla)\mathbf{E}$ , а момент сили  $\mathbf{M} = [\mathbf{p} \times \mathbf{E}] + [\mathbf{r} \times \mathbf{F}]$ .

а)  $\mathbf{F} = 0$ ,  $\mathbf{M} = \frac{2\lambda}{r^2} [\mathbf{p} \times \mathbf{r}]$ , б)  $\mathbf{F} = \frac{2\lambda\mathbf{p}}{r^2}$ ,  $\mathbf{M} = 0$ , в)  $\mathbf{F} = \frac{2\lambda\mathbf{p}}{r^2}$ ,  $\mathbf{M} = 0$ .

**1.24.**  $\mathbf{p} = \mathbf{E}_0 R^3$ ,  $\sigma = \frac{3}{4\pi} \frac{(\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r})}{r}$ ,  $Q = \frac{3}{4} E_0 R^2$

**1.25.** а)  $F = \frac{6\mathbf{E}_0^2 R^6}{l^4}$ , кулі притягуються, б)  $F = \frac{3\mathbf{E}_0^2 R^6}{l^4}$ , кулі відштовхуються.

**1.26.**  $\varphi = \frac{q}{r} + \frac{q}{4r} \left(\frac{R}{r}\right)^2 (1 - 3\cos^2 \theta)$

**1.27.**  $\Delta\varphi = \frac{2q}{R} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{a}{R}\right)^2}}\right)$

**1.28.**  $\varphi = 2\pi\sigma (\sqrt{R^2 + z^2} - z)$ .

**1.29.**  $\varphi = 4\sigma R$

**1.30.**

а)  $\varphi = \begin{cases} \frac{2}{3}\pi\rho(3R^2 - r^2), & r < R, \\ \frac{4\pi R^3 \rho}{3r}, & r > R \end{cases}$ ,

б)  $\varphi = \begin{cases} \lambda \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right), & r < R, \\ -2\lambda \ln \frac{r}{R}, & r > R \end{cases}$ ,

в)  $\varphi = \begin{cases} -2\pi\rho z^2, & |z| < h, \\ 2\pi\rho h(h - 2|z|), & |z| \geq h \end{cases}$

**1.31.**  $\varphi(r) = \begin{cases} 4\pi a \ln \frac{R_2}{R_1}, & r \leq R_1 \\ 4\pi a \left[\left(1 - \frac{R_1}{r}\right) + \ln \frac{R_2}{r}\right], & R_1 \leq r \leq R_2 \\ 4\pi a \frac{R_2 - R_1}{r}, & r \geq R_2 \end{cases}$

**1.32.** Розподіл зарядів знайдемо з рівняння Пуассона:

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho.$$

Розпишемо

$$\begin{aligned}\Delta\varphi &= \nabla \cdot \nabla\varphi = \nabla \cdot \nabla \left( \frac{q}{r} e^{-\frac{r}{a}} \right) = \\ &= \nabla \cdot \left( \frac{q}{r} \nabla e^{-\frac{r}{a}} + e^{-\frac{r}{a}} \nabla \frac{q}{r} \right) = \\ &= \nabla \left( \frac{q}{r} \right) \nabla e^{-\frac{r}{a}} + \frac{q}{r} \Delta e^{-\frac{r}{a}} + \nabla e^{-\frac{r}{a}} \nabla \left( \frac{q}{r} \right) + e^{-\frac{r}{a}} \Delta \left( \frac{q}{r} \right) = \\ &= e^{-\frac{r}{a}} \Delta \left( \frac{q}{r} \right) + 2 \nabla \left( \frac{q}{r} \right) \cdot \nabla e^{-\frac{r}{a}} + \frac{q}{r} \Delta e^{-\frac{r}{a}} = \\ &= -4\pi q \delta(r) + \frac{q}{a^2} \frac{e^{-\frac{r}{a}}}{r}\end{aligned}$$

Співставляючи останній вираз з рівнянням Пуассона, знайдемо розподіл заряду:

$$\rho = q\delta(r) - \frac{q}{4\pi a^2} \frac{e^{-\frac{r}{a}}}{r},$$

звідки видно, що екранований кулонівський потенціал створюється точковим зарядом, навколо якого розподілена «хмара» електричного заряду. Такий характер розподілу зустрічається, наприклад, в електролітах, або плазмі.

**1.33.**  $\rho = \frac{eb^2}{4\pi r} e^{-br}$  при  $r \neq 0$ .  $Q = 0$ .

**1.34.**  $\rho_{\text{in}} = \rho_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right)$ , при  $r < R$ ,  $\rho_{\text{out}} = 0$ , при  $r > R$ .

**1.35.**  $\rho = \frac{3a}{2\pi}$ .

**1.36.**  $\sigma|_{x=0} = 0$ ,  $\sigma|_{x=d} = -\frac{1}{3\pi} k d^{\frac{1}{3}}$ ,  $\rho = -\frac{k}{4\pi} x^{-\frac{2}{3}}$ .

**1.37.**  $\varphi_1 = \varphi_2 = \frac{Q_1+Q_2}{R_1+R_2}$ ,  $q_1 = (Q_1 + Q_2) \frac{R_1}{R_1+R_2}$ ,  $q_2 = (Q_1 + Q_2) \frac{R_2}{R_1+R_2}$ ,

**1.38.**  $q_1 = -Q \frac{R_2-R}{R_2-R_1} \frac{R_1}{R}$ ,  $q_2 = -Q \frac{R-R_1}{R_2-R_1} \frac{R_2}{R}$

**1.39.** 
$$\varphi(r) = \begin{cases} \frac{q_1}{R_1} + \frac{q_2}{R_2}, & r \leq R_1 \\ \frac{q_2}{R_2} + \frac{q_1}{r}, & R_1 \leq r \leq R_2 \\ \frac{q_1+q_2}{r}, & r \geq R_2 \end{cases}$$

**1.40.**  $\varphi = q \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$

**1.41.**  $q = Q \left( \frac{R_2}{R_3} - 1 \right)$

$$1.42. \quad q_1 = -Q \frac{R_3 - R_2}{R_3 - R_1} \cdot \frac{R_1}{R_2}, \quad q_2 = -q_1, \quad E(r) = \begin{cases} 0, & r < R_1 \\ \frac{q_1}{r^2}, & R_1 < r < R_2 \\ \frac{Q + q_1}{r^2}, & R_2 < r < R_3 \\ \frac{Q}{r^2}, & r > R_3 \end{cases},$$

$$\varphi(r) = \begin{cases} \frac{q_1}{R_1} + \frac{Q}{R_2} - \frac{q_1}{R_3}, & r < R_1 \\ \frac{q_1}{r} + \frac{Q}{R_2} - \frac{q_1}{R_3}, & R_1 < r < R_2 \\ \frac{Q + q_1}{r}, & R_2 < r < R_3 \\ \frac{Q}{r}, & r > R_3 \end{cases}.$$

$$1.43. \quad q_1 = -Q \frac{R_1(R_3 - R_2)}{R_2(R_3 - R_1)}, \quad q_2 = Q \frac{R_3(R_2 - R_1)}{R_2(R_3 - R_1)}.$$

$$1.44. \quad F = \frac{qq_0}{b^2} + \frac{q^2 R}{b^3} - \frac{q^2 R b}{(b^2 - R^2)^2}.$$

$$1.45. \quad \sigma_a = -\frac{q_a}{4\pi a^2}, \quad \sigma_b = -\frac{q_a}{4\pi b^2}, \quad \sigma_R = \frac{q_a + q_b}{4\pi R^2}.$$

$$1.46. \quad \text{а) } F = \frac{q^2 R b}{(b^2 - R^2)^2}, \quad \text{б) } F = q^2 R \left( \frac{b}{(b^2 - R^2)^2} - \frac{1}{b^3} \right), \quad \text{в) } F = \frac{qQ}{b^2} - \frac{q^2 R^3 (2b^2 - R^2)}{b^3 (b^2 - R^2)^2}.$$

$$1.47. \quad F = -\frac{qRa}{(a^2 - R^2)^2}. \quad \text{Якщо кулю буде незаземленою, результат не зміниться. Сила взаємодії не залежить від заряду кулі.}$$

$$1.48. \quad \sigma_{in} = \frac{q}{18\pi r^2}, \quad \sigma_{out} = -\frac{q}{4\pi r^2}. \quad \text{Після заземлення } \sigma_{in} = \frac{q}{18\pi r^2}, \quad \sigma_{out} = 0.$$

$$1.50. \quad F = \frac{2\lambda^2}{R(1 - r^2/R^2)}.$$

$$1.51. \quad F = \frac{3p^2 R^3}{b^7}, \quad \text{взаємодія — притягування.}$$

$$1.52. \quad \text{Згідно методу зображень, металева куля створює заряд-зображення } dq' \text{ елемента поверхні диска, на якому міститься заряд } dq = \sigma dS, \text{ де } \sigma = \frac{q}{\pi R^2}. \text{ Величину заряду-зображення (заряд кулі) можна знайти як:}$$

$$q' = - \int \frac{R}{r} \sigma dS.$$

Для інтегрування, зручно скористатись елементом тілесного кута, під яким видно елемент диска з центру сфери:

$$d\Omega = \frac{dS \cos \theta}{r^2}.$$

Отже

$$q' = -2\pi R^2 \int_0^{\pi/4} \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} d\theta = -2(\sqrt{2} - 1)q.$$

$$1.53. \quad \varphi = \frac{Q}{r_1} + \frac{q}{r_2} + \frac{Q+q}{R}.$$

**1.54.**  $\mathbf{E} = -4\pi\mathbf{P} \left(1 - \frac{l}{\sqrt{4R^2 + l^2}}\right).$

**1.55.**  $\mathbf{E} = -2\pi\mathbf{P} \frac{l}{\sqrt{4R^2 + l^2}}.$

**1.56.**  $\mathbf{E} = -\frac{4}{3}\pi\mathbf{P}$

**1.57.**  $\lambda = 0, \mathbf{D} = 0$  у всьому просторі,  $\mathbf{E} = \begin{cases} -4\pi a\omega r \mathbf{e}_r, & r < R \\ 0, & r > R \end{cases}.$

**1.58.**  $\varphi = \frac{2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \frac{q}{r}, \mathbf{E} = \frac{2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \frac{q\mathbf{r}}{r^3}, \mathbf{D} = \begin{cases} \frac{2\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \frac{q\mathbf{r}}{r^3}, & \text{в діелектрику 1} \\ \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \frac{q\mathbf{r}}{r^3}, & \text{в діелектрику 2} \end{cases}$

**1.59.**  $\mathbf{p} = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} R^3 \mathbf{E}_0, \mathbf{E} = \begin{cases} \frac{3}{\varepsilon + 2} \mathbf{E}_0, & r \leq R \\ \mathbf{E}_0 + \frac{\mathbf{p}}{r^3} + \frac{3(\mathbf{p}\mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5}, & r > R \end{cases}, \sigma' = \frac{3}{4\pi} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \frac{\mathbf{E}_0 \mathbf{r}}{r}.$

**1.60.**  $\mathbf{p} = \frac{\frac{1}{\varepsilon} - 1}{\frac{1}{\varepsilon} + 2} R^3 \mathbf{E}_0, \mathbf{P} = \frac{3}{4\pi} \frac{\frac{1}{\varepsilon} - 1}{\frac{1}{\varepsilon} + 2} \mathbf{E}_0, \mathbf{E} = \begin{cases} \frac{3}{\frac{1}{\varepsilon} + 2} \mathbf{E}_0, & r \leq R \\ \mathbf{E}_0 + \frac{\mathbf{p}}{r^3} + \frac{3(\mathbf{p}\mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5}, & r > R \end{cases}.$

**1.61.**  $\mathbf{p} = \frac{\varepsilon_i - \varepsilon_e}{\varepsilon_i + 2\varepsilon_e} R^3 \mathbf{E}_0, \varphi = \begin{cases} -\frac{3\varepsilon_e}{\varepsilon_e + 2\varepsilon_e} (\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r}), & r \leq R \\ -(\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r}) + \frac{\mathbf{p}\mathbf{r}}{r^3}, & r > R \end{cases},$

$\mathbf{E} = \begin{cases} \frac{3\varepsilon_e}{\varepsilon_i + 2\varepsilon_e} \mathbf{E}_0, & r \leq R \\ \mathbf{E}_0 + \frac{\mathbf{p}}{r^3} + \frac{3(\mathbf{p}\mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5}, & r > R \end{cases}, \sigma' = \frac{3}{4\pi} \frac{\varepsilon_i - \varepsilon_e}{\varepsilon_i + 2\varepsilon_e} \frac{\mathbf{E}_0 \mathbf{r}}{r}.$

**1.62.**  $\mathbf{P}(r) = \frac{1}{4\pi} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \frac{q\mathbf{r}}{r^3}, \rho' = 0, \sigma' = -\frac{1}{4\pi} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \frac{q}{R^2}$

**1.63.**  $\sigma' = \frac{q}{4\pi R^2} \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1}\right)$

**1.64.**  $\sigma' = -\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1} \frac{qh}{(x^2 + h^2)^{3/2}},$  де  $x$  – координата вздовж межі розділу,  $q' = -\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1} q.$

**1.65.** Не зміниться.

**1.66.** Збільшиться в 1.5 рази.

**1.67.**  $C \approx \frac{\varepsilon R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$

**1.68.**  $C = \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \left(1 + \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} \Omega\right).$

**1.69.**  $C = \frac{a R_1^2}{R_2 - R_1}.$

**1.70.**  $C = \left[ \frac{1}{\varepsilon_1} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R}\right) + \frac{1}{\varepsilon_2} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_2}\right) \right]^{-1},$  зв'язані заряди знаходяться на поверхнях розділу:  $\sigma'_{R_1} = -\frac{q}{4\pi R_1^2} \frac{\varepsilon_1 - 1}{\varepsilon_1}, \sigma'_{R_2} = -\frac{q}{4\pi R_2^2} \frac{\varepsilon_2 - 1}{\varepsilon_2}, \sigma'_R = \frac{q}{4\pi R^2} \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 \varepsilon_2}.$

**1.71.**  $C = \frac{aS}{4\pi d \ln 2},$  заряд обкладки конденсатора  $\sigma = \frac{aV}{4\pi d \ln 2}, \sigma'_{z=0} = -\sigma \left(1 - \frac{1}{a}\right), \sigma'_{z=d} = -\sigma \left(1 - \frac{1}{2a}\right), \rho' = -\frac{\sigma d}{a(z+d)^2}.$

**1.72.**  $C \approx R.$

$$1.73. C = \frac{1}{4 \ln \frac{l-R}{R}}.$$

$$1.74. \varphi = E_0 h \left( 1 - \frac{\ln \frac{\sqrt{2h^2+d^2}}{d}}{\ln \frac{2h}{R}} \right) = 6.6 \text{ кВ.}$$

$$1.75. C = \frac{1}{4 \ln \frac{2hl}{R\sqrt{d^2+2h^2}}}.$$

$$1.76. C = \frac{1}{4} \ln^{-1} \frac{\left( \frac{2R^2}{l} - \frac{l}{2} + r \right) (l-r)}{\left( \frac{2R^2}{l} + \frac{l}{2} - r \right) r}.$$

$$1.77. C_{\text{ланки}} = C(\sqrt{5} - 1)/2.$$

$$1.78. V = \mathcal{E}/(1 + 3\eta + \eta^2).$$

$$1.79. \text{а) } \varphi_A - \varphi_B = \mathcal{E} \frac{C_2 C_3 - C_1 C_4}{(C_1 + C_2)(C_3 + C_4)}, \text{ б) } \varphi_A - \varphi_B = \frac{\mathcal{E}_2 C_2 - \mathcal{E}_1 C_1}{(C_1 + C_2 + C_3)}.$$

$$1.81. W_1 = \frac{q_1^2}{2R_1}, W_2 = \frac{q_1^2}{2R_1}, W_{12} = \frac{q_1 q_2}{R_2}, W = W_1 + W_2 + W_{12}.$$

$$1.82. F = \frac{q^2}{8R^2}.$$

$$1.83. F = \frac{q(q+2q_0)}{8R^2}.$$

$$1.84. F = \frac{\lambda^2}{\pi R}.$$

$$1.85. W = \frac{q^2}{(\varepsilon+1)R}.$$

$$1.86. W = \frac{q^2}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)R}.$$

$$1.87. q = (\varepsilon + 1) \sqrt{\frac{4\pi}{3} \frac{(\rho_2 - 2\rho_1)gR^5}{\varepsilon}}.$$

$$1.88. \Delta W = \frac{q^2}{2} \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon} \left( \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_2} \right).$$

$$1.89. W = -\frac{2q^2}{a}$$

$$1.90. W = -(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{E}_2) = -\frac{3(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{r})(\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{r})}{r^5} + \frac{(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2)}{r^3} = -\frac{p_1 p_2}{d^3} [3 \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \cos(\theta_1 - \theta_2)],$$

а)  $\theta_1 = \theta_2 = \pi/2$ , б)  $\theta_1 = 0$ ,  $\theta_2 = \pi/2$ , в)  $\theta_1 = \theta_2 = 0$ .

1.91. В діелектрику виникає зображення диполя, з моментом  $\mathbf{p}' = \mathbf{p} \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}$ . Кут між полем  $\mathbf{E}$  і диполем  $\mathbf{p}'$  дорівнює  $\pi - \alpha$ .

Енергія взаємодії диполя з зовнішнім полем та своїм зображенням:

$$W = -(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}) + \frac{\mathbf{p}' \cdot \mathbf{p}}{r^3} - \frac{3(\mathbf{p}' \cdot \mathbf{r})(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})}{r^5} = -p \left( E \cos \alpha - \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1} \frac{p^2}{8d^3} (2 - \cos^2 \alpha) \right).$$

Екстремуми  $W(\alpha)$  можливі при  $\sin \alpha = 0$  та  $\cos \alpha = \frac{E}{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1} \frac{p^2}{4d^3}}$ .

Отже, якщо  $E < \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1} \frac{p^2}{4d^3}$ , то  $\alpha = \pm \arccos \left( \frac{E}{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1} \frac{p^2}{4d^3}} \right)$ , якщо  $E < \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1} \frac{p^2}{4d^3}$ ,

то  $\alpha = 0$ .

$$1.92. F = \frac{2\pi q^2}{S}.$$

$$1.93. F = \frac{6R^6}{l^4} E_0.$$

$$1.94. h = \frac{\varepsilon-1}{8\pi g \rho} \left( \frac{V}{d} \right)^2.$$

**1.95.**  $F = \frac{S}{8\pi} \left( \frac{\varepsilon V}{\varepsilon d_1 + d_2} \right)^2.$

**1.96.** а)  $F \approx \frac{0.13r^3}{3R^5}(\varepsilon - 1)Q^2$ , при  $z = 0.286R$ ; б)  $F \approx -\frac{0.13r^3}{3R^5}(\varepsilon - 1)Q^2$ , при  $z = 1.104R$ ; в) При  $z = 0$ , положення нестійкої рівноваги, та при  $z = R/\sqrt{2}$ , положення стійкої рівноваги.

**1.97.**  $M = \frac{V}{8\pi} \frac{(\varepsilon - 1)^2}{\varepsilon + 1} E_0^2 \sin 2\alpha.$

**1.98.** Поле на осі кільця дорівнює:

$$E(z) = \frac{qz}{(R^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Оскільки  $r \ll R$ , то можна вважати, що кулька поляризується в однорідному полі. Дипольний момент кульки дорівнює:

$$p = E(z) \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} r^3.$$

Енергія квазіпружного диполя:

$$W = -\frac{1}{2}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}) = -\frac{1}{2} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} r^3 E^2.$$

Сила, що діє на кульку:

$$F = -\frac{dW}{dz} = q^2 \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} r^3 \frac{z(R^2 + 2z^2)}{(R^2 + z^2)^4}.$$

## Постійний струм

**2.1.** У випадку неоднорідних провідників  $\lambda = \lambda(\mathbf{r})$ . Для постійних струмів:

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = 0,$$

використовуючи закон Ома в диференціальній формі:

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = \nabla \cdot (\lambda \mathbf{E}) = \lambda \nabla \cdot \mathbf{E} + \mathbf{E} \cdot \nabla \lambda = 0.$$

З теореми Гауса в диференціальній формі  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho$ , бачимо, що густина об'ємних зарядів в провіднику дорівнює:

$$\rho = -\frac{\mathbf{j} \cdot \nabla \lambda}{4\pi}.$$

Об'ємного заряду не виникає у випадку однорідного провідника ( $\lambda = \text{const}$ ).

**2.2.**  $j_{1n} = j_{2n}, \frac{j_{1\tau}}{\lambda_1} = \frac{j_{2\tau}}{\lambda_2}.$

**2.4.**  $I = \frac{4\pi VC}{\rho\varepsilon}$

**2.5.**  $q = \frac{I}{4\pi} \left( \frac{\varepsilon_2}{\lambda_2} - \frac{\varepsilon_1}{\lambda_1} \right).$

**2.6.**  $\sigma = \frac{V}{4\pi} \frac{\varepsilon_2 \lambda_1 - \varepsilon_1 \lambda_2}{d_1 \lambda_2 + d_2 \lambda_1}.$

$$\mathbf{2.7.} \quad \rho = \frac{4\pi\tau}{\varepsilon \ln \frac{3}{2}}$$

$$\mathbf{2.8.} \quad R = \frac{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}{2\pi l \lambda}, \quad C = \frac{\varepsilon}{\lambda R}.$$

$$\mathbf{2.9.} \quad R = \frac{\varepsilon \rho (R_2 - R_1)}{4\pi R_1 R_2}.$$

**2.10.** Згідно теореми Гауса, заряд однієї із оболонок дорівнює:

$$Q = \frac{1}{4\pi} \oint_S \mathbf{E} d\mathbf{S}.$$

З іншого боку, із означення ємності системи двох провідників:

$$Q = CV,$$

де  $V$  – різниця потенціалів між провідниками,  $C$  – їх взаємна ємність.

Звідси,

$$V = \frac{1}{4\pi C} \oint_S \mathbf{E} d\mathbf{S}.$$

Струм між цими провідниками можна знайти як:

$$I = \oint_S \mathbf{j} d\mathbf{S} = \lambda \oint_S \mathbf{E} d\mathbf{S}.$$

Отже, опір середовища знаходимо з закону Ома:

$$R = \frac{V}{I} = \frac{1}{4\pi\lambda C}.$$

$$\mathbf{2.11.} \quad R = \frac{\rho}{4\pi} \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right), \quad C = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}.$$

$$\mathbf{2.12.} \quad q_1 = \frac{\varepsilon r_2}{r_2/r_1 + \lambda_1/\lambda_2}, \quad q_2 = \frac{\varepsilon r_1}{r_1/r_2 + \lambda_2/\lambda_1}.$$

$$\mathbf{2.13.} \quad R = \frac{1}{\pi\lambda D} \approx 8 \text{ Ом}, \quad U_{\text{крокова}} = \frac{UD}{2} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r+l} \right) \approx 246 \text{ В}.$$

$$\mathbf{2.14.} \quad \mathbf{p} = \frac{\lambda_i - \lambda_e}{\lambda_i + 2\lambda_e} R^3 \mathbf{E}_0,$$

$$\mathbf{j} = \begin{cases} \frac{3\lambda_e}{\lambda_i + 2\lambda_e} \mathbf{j}_0, & r \leq R \\ \mathbf{j}_0 + \frac{\lambda_i - \lambda_e}{\lambda_i + 2\lambda_e} \left( \frac{3R^3}{r^5} (\mathbf{j}_0 \cdot \mathbf{r}) - \frac{R^3}{r^3} \mathbf{j}_0 \right), & r > R, \end{cases} \quad \text{де } r - \text{відстань від цен-}$$

тру порожнини,

$$\sigma = \frac{3}{4\pi} \frac{\lambda_i - \lambda_e}{\lambda_i + 2\lambda_e} \frac{\mathbf{E}_0 \mathbf{r}}{R}.$$

**2.15.** Задача аналогічна до **2.14**, де треба покласти  $\lambda_i = 0$ .

$$\mathbf{2.16.} \quad V = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3}{r_1 + r_2 + r_3} r_1 - \varepsilon_1.$$

$$\mathbf{2.17.} \quad R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}, \quad I = 0 \text{ при } \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{R_1}{R_2}.$$

**2.18.**  $\varphi_A - \varphi_B = \frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2}{R_1 + R_2} R_2 - \mathcal{E}_1 = -4 \text{ В.}$

**2.19.** Відносна похибка

$$\frac{\Delta R_x}{R_x} = \frac{(R_x + R_3)(R_1 + R_2)}{R_2 R_x} \frac{\Delta V}{V}$$

де  $V$  – напруга на містку і  $\Delta V$  – різниця потенціалів на клеммах гальванометра при зміні  $R_x$  на  $R_x + \Delta R_x$ . У стані рівноваги  $R_x/R_3 = R_1/R_2 = b$ , тому множник при  $\frac{\Delta V}{V}$  дорівнюватиме  $(1 + b)^2/b$ , він має мінімум при  $b = 1$ .

**2.21.**  $R_{AB} = 2R(1 + \sqrt{3}).$

**2.22.**  $I = V \frac{R_2 - R_1}{2R_1 R_2} = 1.0 \text{ А.}$  Струм тече від 1 до 2.

**2.23.**  $R_{AB} = R_2 \frac{R_2 + 3R_1}{R_1 + 3R_2}.$

**2.24.**  $Q = \frac{4\pi\lambda}{\varepsilon} \sum_i^n q_i \varphi_i.$

**2.25.**  $P = \frac{2\pi l V}{\rho \ln \frac{R_2}{R_1}}.$

**2.26.**  $Q = \frac{q^2}{2\varepsilon} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right).$

**2.27.**  $P_1 = \frac{2V^2}{d} \frac{\rho_1}{(\rho_1 + \rho_2)^2} S, P_2 = \frac{2V^2}{d} \frac{\rho_2}{(\rho_1 + \rho_2)^2} S.$

**2.28.** Напруженість поля в середині кулі визначається формулою

$$\mathbf{E}_i = \frac{3}{\lambda_i + 2\lambda_e} \mathbf{j}_0,$$

де  $\mathbf{j}_0$  – густина струму далеко від кулі. Потужність, що виділяється в одиниці об'єму згідно закону Джоуля-Ленца  $w = \mathbf{j}_i \cdot \mathbf{E}_i$ , отже, використовуючи закон Ома  $\mathbf{j}_i = \lambda_i \mathbf{E}_i$ :

$$w = \frac{9\lambda_i}{(\lambda_i + 2\lambda_e)^2} \mathbf{j}_i^2.$$

Звідки випливає, що максимум потужності буде при  $\lambda_i = 2\lambda_e$ .

## Магнітостатика

**3.2.**  $B = \frac{2\pi I}{cp}$ , де  $p = \frac{b^2}{a}$  – фокальний параметр еліпса.

**3.3.**  $B_z = \frac{2\pi}{c} \frac{IR^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$ , а)  $B_z = \frac{2\pi}{c} In(\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2)$ , б)  $B_z(0) = \frac{2\pi}{c} In$ , в)  $B_z(0) = \frac{4\pi}{c} In$ .

**3.4.**  $B_z(z) = \frac{2q\omega}{cR^2} \left( \frac{2z^2 + R^2}{\sqrt{R^2 + z^2}} - 2z \right).$

**3.5.**  $B(r) = \begin{cases} \frac{2Ir}{cR_1^2}, & r < R_1 \\ \frac{2I}{cr}, & R_1 \leq r \leq R_2 \\ 0, & r \geq R_2 \end{cases}$



**3.6.**  $B = \frac{2\pi}{c}jd.$

**3.7.**  $B(r) = \frac{1}{c} \frac{Id}{rR}.$

**3.8.**  $\mathbf{B} = \begin{cases} \frac{4\pi}{c}a\omega r^2 \mathbf{e}_r, & r < R \\ 0, & r > R \end{cases}.$

**3.11.**  $B = \frac{q\omega}{2c} \frac{R^2}{z^3}, B = \frac{2p_m}{z^3}.$

**3.12.** Для сфери  $\mathbf{p}_m = \frac{qR^2}{3c}\boldsymbol{\omega}$ , для кулі  $\mathbf{p}_m = \frac{qR^2}{5c}\boldsymbol{\omega}$ . В обох випадках  $\frac{p_m}{L} = \frac{q}{2mc}.$

**3.13.**  $\mathbf{A} = \frac{1}{2} [\mathbf{B} \times \mathbf{r}].$

**3.14.** З рівняння (25) випливає, що  $\nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times \left( \frac{\mathbf{p}_m \times \mathbf{r}}{r^3} \right) = -(\mathbf{p}_m \cdot \nabla) \frac{\mathbf{r}}{r^3}.$  Розписуючи останній вираз в декартовій системі координат, отримуємо шукану формулу.

**3.15.** При калібровці  $\mathbf{A}(0) = 0$ ,  $\mathbf{A}(r) = \begin{cases} -\frac{1}{c}\pi r^2 \mathbf{j}, & r \leq R \\ -\frac{1}{c}2\pi R^2 \left( \frac{1}{2} + \ln \frac{r}{R} \right) \mathbf{j}, & r \geq R \end{cases}.$

**3.16.**  $B = \frac{2e\hbar}{405mca^3}.$

**3.17.**  $\Delta \mathbf{B} = -\frac{e^2 \mathbf{B}_0}{3amc^2}.$

**3.18.**  $\mathbf{A} = \begin{cases} \frac{4\pi}{3}R\omega\sigma r \sin\theta \mathbf{e}_\varphi = \frac{\mathbf{p}_m \times \mathbf{r}}{R^3}, & r \leq R \\ \frac{4\pi}{3}R^4\omega\sigma \frac{\sin\theta}{r^2} \mathbf{e}_\varphi = \frac{\mathbf{p}_m \times \mathbf{r}}{r^3}, & r \geq R \end{cases}, \mathbf{B} = \begin{cases} \frac{8\pi}{3c}R\sigma\boldsymbol{\omega} = \frac{2\mathbf{p}_m}{R^3}, & r \leq R \\ \frac{3(\mathbf{p}_m \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{p}_m}{r^3}, & r \geq R \end{cases}.$

**3.19.**  $\mathbf{A} = \frac{2I}{c} \ln r \mathbf{k}$ ,  $\mathbf{k}$  — орт, напрямлений вздовж провідника зі струмом.

**3.20.**  $\mathbf{A} = -\frac{2\pi j R d}{c} \ln R$ ,  $\mathbf{k}$  — орт, напрямлений вздовж провідника зі струмом.

**3.22.**  $\mathbf{B} = 4\pi\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{H} = 0$ ,  $\mathbf{j}' = 0$ ,  $\mathbf{i}' = \mathbf{M} \times \mathbf{n}.$

**3.23.**  $\mathbf{B} = \begin{cases} 4\pi\mathbf{M}, & r < R \\ 0, & r > R \end{cases}, \mathbf{H} = 0$  в усьому просторі.

**3.24.** При  $r \leq R$ ,  $\mathbf{B} = \frac{8\pi}{3}\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{H} = -\frac{4\pi}{3}\mathbf{M}.$

**3.25.**  $\mathbf{H}_{\text{осердя}} \approx -4\pi\mathbf{M} \frac{d}{2\pi R} \left(1 - \frac{d}{2\pi R}\right)$ ,  $\mathbf{H}_{\text{зазор}} \approx 4\pi\mathbf{M} \left(1 - \frac{d}{2\pi R}\right)$ ,  $\mathbf{B}_{\text{осердя}} = \mathbf{B}_{\text{зазор}} = \mathbf{H}_{\text{зазор}}.$

**3.26.** а)  $I'_{\text{пов}} = 4\pi\chi I$ ; б)  $I'_{\text{об}} = 4\pi\chi I$ . Струми напрямлені протилежно один відносно одного.

**3.27.** а)  $\mathbf{M} = ar^2 \mathbf{B}_0$ ; б)  $\mathbf{j}' = c\nabla \times \mathbf{M} = c\chi \nabla \times \mathbf{H} - \nabla \chi \times \mathbf{H} = 2acr \mathbf{B}_0.$

**3.28.**  $\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}nI\mathbf{e}_z$ ,  $\mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}(1 + \chi)nI\mathbf{e}_z$ ,  $\mathbf{i}' = \chi nI\mathbf{e}_\varphi.$

**3.29.**  $H(r) = \begin{cases} \frac{2I}{cR^2}r, & r < R \\ \frac{2I}{cr}, & r \geq R \end{cases}, B(r) = \begin{cases} \mu_1 \frac{2I}{cR^2}r, & r < R \\ \mu_2 \frac{2I}{cr}, & r \geq R \end{cases},$

$$M(r) = \begin{cases} (\mu_1 - 1) \frac{2I}{cR^2} r, & r < R \\ (\mu_2 - 1) \frac{2I}{cr}, & r \geq R \end{cases}, j'(r) = \begin{cases} (\mu_1 - 1) \frac{4I}{cR^2}, & r < R \\ 0, & r \geq R \end{cases},$$

$$i' = \frac{2I}{R}(\mu_2 - \mu_1), \text{ при } r = R.$$

**3.30.**  $M(r) = \frac{\mu-1}{\mu+1} \frac{4I}{r}, B(r) = \frac{\mu}{\mu+1} \frac{4I}{cr}, H_1(r) = \frac{\mu}{\mu+1} \frac{4I}{cr}, H_2(r) = \frac{1}{\mu+1} \frac{4I}{cr},$   
 $I' = I \frac{\mu-1}{\mu+1}.$

**3.31.**  $B_r = (1 + 4\pi\chi) \frac{2I}{cr}, I' = 4\pi\chi I,$  на зовнішній та внутрішній поверхнях магнетика напрямком струмів намагнічування співпадає з напрямком вільних струмів.

**3.32.**  $I' = 0.$

**3.33.**  $\mathbf{H} = \begin{cases} \frac{2Ir}{cR^2} \mathbf{e}_\varphi, & r \leq R \\ \frac{2I}{cR} \mathbf{e}_\varphi, & r > R \end{cases}, \mathbf{B} = \begin{cases} \frac{2Ir}{cR^2} \mathbf{e}_\varphi, & r \leq R \\ \frac{2I\mu_1}{cR} \mathbf{e}_\varphi, & r > R \text{ (в середовищі з } \mu_1) \\ \frac{2I\mu_2}{cR} \mathbf{e}_\varphi, & r > R \text{ (в середовищі з } \mu_2) \end{cases}.$

**3.34.**  $\mathbf{p}_m = \frac{\mu_i - \mu_e}{\mu_i + 2\mu_e} R^3 \mathbf{B}_0, \mathbf{B} = \begin{cases} \frac{3\mu_i}{\mu_i + 2\mu_e} \mathbf{B}_0, & r \leq R, \\ \mathbf{B}_0 - \frac{\mathbf{p}_m}{r^3} + \frac{3(\mathbf{p}_m \mathbf{r}) \mathbf{r}}{r^5}, & r > R. \end{cases}$

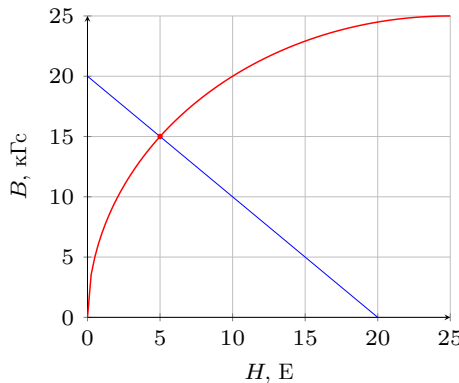
Густина об'ємних струмів намагнічування  $\mathbf{j}' = 0$ , поверхнева густина струмів намагнічування  $i = \frac{3c}{4\pi} \frac{\mu_i - \mu_e}{\mu_i + 2\mu_e} \frac{\mathbf{B}_0 \mathbf{r}}{R}$ , де  $\mathbf{r}$  – радіус-вектор поверхні провідника.

**3.35.**  $\mathbf{B} = \frac{3\mu}{1+2\mu} \mathbf{B}_0.$

**3.36.**  $B = \frac{4\pi M_r}{1 + \frac{2dM_r}{RH_c}}.$

**3.38.**  $I_0 = \frac{cl}{4\pi N} (H_0 + 4\pi M_0 \frac{d}{l}), B = \frac{4\pi N}{cl} I + 4\pi M_0 (1 - \frac{d}{l}).$

**3.39.** На рисунку показана робоча точка залізного осердя ( $H \approx 5$  Е,  $B \approx 15$  кГс).  $\mu = 3000.$



**3.40.**  $p = \frac{I^2}{2\pi c^2 R^2}.$

**3.43.**  $M = \frac{4\pi p_m N I}{cl}.$

**3.44.**  $M = 2I\mathfrak{M}_0 S.$

$$3.45. F_{\parallel}/l = I \cdot B_{\perp} = I \cdot B \cos \varphi.$$

$$3.46. \text{ а) } \mathbf{F} = 0, \mathbf{M} = -\frac{2I}{cr^2} \mathbf{r}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}), \text{ б) } \mathbf{F} = -\frac{2I}{cr^2} [\mathbf{k} \times \mathbf{p}], \mathbf{M} = 0, \\ \text{ в) } \mathbf{F} = \frac{2I}{cr^2} [\mathbf{k} \times \mathbf{p}], \mathbf{M} = 0, \text{ де } \mathbf{k} \text{ — орт, напрямлений вздовж струму.}$$

$$3.47. B = \frac{c\pi d^2 \sigma_{\max}}{4RI}.$$

$$3.48. L/l = \frac{\mu}{2} \left(1 + 4 \ln \frac{R_2}{R_1}\right).$$

$$3.49. M = 8\pi a.$$

$$3.50. F = -\frac{4I^2 r^3}{c^2 l^3} \frac{\mu-1}{\mu+2}.$$

$$3.51. h = \frac{2\pi\mu(\mu-1)n^2 I^2}{g\rho c^2}.$$

$$3.52. F_x = \frac{4\pi}{c} n_1 U_1 n_2 I_2.$$

$$3.53. F = \frac{2\pi}{c} (\mu - 1) n^2 I^2 S.$$

## Електродинаміка

$$4.1. v = \frac{mgl}{(Bl)^2}.$$

$$4.2. v = c \frac{mgRc - \mathcal{E}Bl}{(1 + \frac{r}{R})B^2 l^2}.$$

$$4.3. v = \frac{3}{2} \frac{mgRc^2}{B^2 l^2}.$$

$$4.4. \text{ а) } \mathcal{E} = \frac{2I_0 l}{c(a+vt)}, \text{ б) } I = \frac{I_0 lv}{cr(a+vt)(l+vt)}.$$

$$4.5. I = \frac{\omega B r^2}{2cR}.$$

$$4.6. \text{ а) } V = \frac{B\omega R^2}{2c}; \text{ б) } \sigma = \frac{\omega BR}{4\pi}, \rho = -\frac{\omega B}{2\pi}.$$

$$4.7. V_1 = \frac{B\omega C_2 |R_1^2 \pm R_2^2|}{2(C_1 + C_2)}, V_2 = \frac{B\omega C_1 |R_1^2 \pm R_2^2|}{2(C_1 + C_2)}. \text{ Знак «+» стосується випадку обертання дисків в різних напрямках, «-» — до обертання дисків в одному напрямку.}$$

$$4.8. \mathcal{E} = \frac{2Ia^2 v}{c(b+vt)(a+b+vt)}, L_{12} = 2a \ln \left(1 + \frac{a}{s}\right).$$

$$4.9. x = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t, I = -v_0 \sqrt{\frac{m}{L}} \sin \omega t, \text{ де } \omega = \frac{lB}{\sqrt{mL}}.$$

$$4.10. \omega = \frac{qB(t)}{2mc}.$$

$$4.11. q_1 = -\frac{1}{c} \dot{\Phi} \frac{C_1(C_2+C_3/2)}{C_1+C_2+C_3}, q_2 = \frac{1}{c} \dot{\Phi} \frac{C_2(C_1+C_3/2)}{C_1+C_2+C_3}, q_3 = \frac{1}{c} \dot{\Phi} \frac{C_3/2(C_2-C_1)}{C_1+C_2+C_3}.$$

$$4.12. V_1 = \alpha \frac{R_1}{R_1+R_2}, V_2 = -\alpha \frac{R_2}{R_1+R_2}.$$

$$4.13. \Phi = \frac{2Ia}{c} \ln \left(1 + \frac{a}{b}\right).$$

$$4.14. I = \frac{\pi^2 r^2 G \omega}{\sqrt{2} c^2 R} i_0 \sin \omega t.$$

$$4.15. I = \frac{2p_m \pi a^2 \omega}{c R l^3} \sin \omega t.$$

$$4.16. \text{ В СИ } p_m = \frac{\varphi R D}{4\pi b n}.$$

$$4.17. \mathbf{p}_m = -\frac{1}{2}R^3\mathbf{B}_0, \mathbf{B} = \begin{cases} 0, & r \leq R \\ \left(1 + \frac{R^3}{2r^3}\right)\mathbf{B}_0 - \frac{3R^3(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{2r^5}, & r > R, \end{cases}$$

Густина об'ємних струмів намагнічування  $\mathbf{j}' = 0$ .

Поверхнева густина струмів намагнічування  $i = -\frac{3c}{8\pi}\frac{\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{r}}{R}$ , де  $\mathbf{r}$  – радіус-вектор поверхні провідника.

$$4.18. F = \frac{9}{64}B_0^2R^2.$$

4.19. Магнітний потік, що пронизує надпровідне кільце зберігається  $\Phi = \text{const}$ . Оскільки, в спочатку диполь не було внесено, то  $\Phi = 0$ , і залишатиметься таким же. Коли магнітний диполь опиниться в центрі кільця, то магнітний потік, що пронизує кільце, можна порахувати як:

$$\Phi = \frac{1}{c}LI + \frac{1}{c}L_{21}I_m = 0,$$

де  $L$  – індуктивність кільця,  $I$  – струм, що тече по кільцю,  $L_{21}$  – коефіцієнт взаємодукції,  $I_m$  – умовний струм, що циркулює в диполі  $p_m$  ( $I_m = \frac{cp_m}{S}$ ,  $S$  – умовна площа витка диполя).

З закону збереження магнітного потоку випливає, що  $I = -\frac{L_{12}}{L}\frac{cp_m}{S}$ . Для знаходження  $L_{21}$ , скористаємось теоремою взаємності,  $L_{21} = L_{12} = \frac{2\pi S}{R}$ . Отже,

$$I = -\frac{2\pi c p_m}{RL}.$$

Знак мінус вказує на те, що індукційний що магнітний момент струму протилежний магнітного моменту диполя.

$$4.20. I = \frac{c\Phi_0}{L}.$$

$$4.21. I = \frac{cB\pi R^2}{L}, A = \frac{\Phi^2}{2L} = \frac{B^2\pi^2 R^4}{2L}.$$

$$4.22. h = \frac{1}{2}\sqrt[4]{\frac{3p_m^2}{mg}}.$$

$$4.23. I \geq c\sqrt{\frac{mgh}{2\pi R}} = 8.4 \cdot 10^{10} \text{ Фр/с} = 25 \text{ А}.$$

$$4.24. v_0 = B_0\sqrt{\frac{R^3}{2m}} \approx 20 \text{ м/с}.$$

$$4.25. F = \left(\frac{2\pi IR}{c}\right)^2 \frac{3r^3 z}{2(R^2+z^2)^4}.$$

$$4.26. p = \frac{9}{32\pi}\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{r}, \text{ де } \mathbf{r} \text{ – радіус-вектор поверхні сфери}.$$

$$4.27. \boldsymbol{\omega} = -\frac{q\mathbf{B}(t)}{2mc}.$$

$$4.28. \boldsymbol{\omega} = \frac{2\sigma\mathbf{B}}{c\rho R}.$$

$$4.29. E(r) = \frac{2\pi\varepsilon}{c^2}\frac{NI_0R^2\omega}{lr}\sin\omega t.$$

$$4.30. E_y = \begin{cases} \frac{4\pi}{c^2}ax, & x < d/2, \\ \frac{4\pi}{c^2}ad, & x \geq d/2. \end{cases} \quad (\text{Вісь } Ox \text{ напрямлена перпендикулярно})$$

площинам, вісь  $Oy$  – вздовж площин, вісь  $Oz$  співпадає з напрямком магнітного поля.)

$$4.31. \mathbf{E} = \begin{cases} -\frac{2\pi}{c^2} n \dot{I} r \mathbf{e}_\varphi, & r < R, \\ -\frac{2\pi}{c^2} n a^2 \dot{I} \frac{1}{r} \mathbf{e}_\varphi, & r > R. \end{cases}$$

$$4.32. \mathbf{B} = \begin{cases} \frac{2\pi\rho\omega}{c} (R^2 - r^2) \mathbf{e}_z, & r < R, \\ 0, & r \geq R, \end{cases}$$

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \frac{\pi k \rho r \omega}{2c^2} (2R^2 - r^2) \mathbf{e}_\varphi + 2\pi \rho r \mathbf{e}_r, & r < R, \\ \frac{\pi k \rho r R^4}{2c^2 r} \mathbf{e}_\varphi + \frac{2\pi \rho R^2}{r} \mathbf{e}_r, & r \geq R. \end{cases}$$

4.33. Це можливо за умови  $\mathbf{j}_0 \cdot \mathbf{k} = 0$ .

$$4.35. B = \frac{2I}{cR^2} s.$$

4.36.  $B = \frac{\varepsilon\omega r}{2cd} V_0 \cos \omega t$ , де  $r$  – відстань від осі конденсатора.

$$4.37. \Phi = I^2 R$$

$$4.40. \Delta p = \frac{EB}{2\pi c} V = 10^{-6} \text{ Г}\cdot\text{см/с}.$$

## Рух частинок в електромагнітному полі

$$5.1. x = \frac{2E_0}{k}.$$

5.2.  $x = \frac{p_0 c}{qE} \operatorname{arcsch} \frac{cqEt}{\varepsilon_0}$ ,  $y = \frac{1}{qE} \sqrt{\varepsilon_0^2 + (qcEt)^2} - \frac{\varepsilon_0}{qE}$ . Траєкторія частинки  $y = \frac{\varepsilon_0}{qE} \left( \operatorname{ch} \frac{eEx}{cp_0} - 1 \right)$ .

5.4.  $\Delta\omega = \pm \frac{qB}{2mc}$ . Частота  $\Delta\omega > 0$ , якщо  $\mathbf{B} \uparrow\downarrow \boldsymbol{\omega}$ , і  $\Delta\omega < 0$ , якщо  $\mathbf{B} \uparrow\uparrow \boldsymbol{\omega}$ .

$$5.5. l_{\max} = R e^{\frac{mv_0}{2cqI}}.$$

5.6.  $x(t) = \frac{E_0}{B_0} c \left( t - \frac{1}{\Omega} \sin \Omega t \right)$ ,  $y(t) = \frac{E_0}{B_0} \frac{c}{\Omega} (1 - \cos \Omega t)$ , де  $\Omega = \frac{qB_0}{mc}$  — циклотронна частота.

$$5.7. v_0 = c \frac{E_0}{B_0}.$$

$$5.8. x(t) = \frac{qE_0}{2m\Omega^2} (\sin \Omega t - \Omega t \cos \Omega t), y(t) = \frac{qE_0}{2m\Omega} t \sin \Omega t.$$

$$5.9. z = l \operatorname{tg} \sqrt{\frac{qB_0^2}{2mc^2 E_0}} y.$$

$$5.10. v = \frac{rqB_0}{2mc}, \rho = \frac{r}{2}.$$

$$5.11. V = 2 \frac{e}{m} \frac{I^2}{c^2} \ln \frac{a}{b}.$$

$$5.12. B \leq \sqrt{\frac{8mV}{e}} \frac{b}{b^2 - a^2}.$$

## Кола змінного струму

$$6.1. I = \frac{\varepsilon}{R} \left( 1 - e^{-\frac{R}{2L} t} \right).$$

**6.2.**  $I_1 = \frac{\mathcal{E}}{R} \frac{L_2}{L_1+L_2}, I_2 = \frac{\mathcal{E}}{R} \frac{L_1}{L_1+L_2}.$

**6.3.**  $Q = \frac{C_1 \mathcal{E}^2}{2} = 0.3 \text{ Дж}.$

**6.4.**  $Q = \frac{L_2 \mathcal{E}^2}{2r^2}.$

**6.5.**  $I_{\max} = \mathcal{E} \sqrt{C/L}, U_{C\max} = 2\mathcal{E}.$

**6.7.**  $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{4R^2C^2}}.$

**6.8.**  $M = -L_2.$

**6.9.**  $\omega_{1,2}^2 = \frac{L_1 C_1 + L_2 C_2 \pm \sqrt{(L_1 C_1 - L_2 C_2)^2 + 4C_1 C_2 L_{12}^2}}{2C_1 C_2 (L_1 L_2 - L_{12}^2)}.$

**6.10.**  $\omega_{1,2}^2 = \frac{[L_1(C+C_1) - L_2(C+C_2)] \pm \sqrt{[L_1(C+C_1) - L_2(C+C_2)]^2 + 4L_1 L_2 C^2}}{2L_1 L_2 (C_1 C_2 + C C_1 + C C_2)}.$

**6.11.**

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{LC_1} + \frac{1}{LC_2} + \frac{1}{L_1 C_1} + \frac{1}{L_2 C_2} \right) \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left[ \frac{1}{C_1} \left( \frac{1}{L} + \frac{1}{L_1} \right) - \frac{1}{C_2} \left( \frac{1}{L} + \frac{1}{L_2} \right) \right]^2 + \frac{4}{L^2 C_1 C_2}}.$$

**6.12.**  $I = \mathcal{E}_0 \frac{1-\omega^2 CL}{\omega L(2-\omega^2 CL)} \sin \omega t, I = \mathcal{E}_0 \frac{1-\omega^2 CL}{\omega(2-\omega^2 CL)} \sin \omega t.$

**6.13.**  $RC = L/R, \operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L}{R}.$

**6.14.**  $\omega^2 LC = 1.$

**6.15.**  $Z = \sqrt{\frac{L}{C} - \frac{\omega^2 L^2}{4}}.$  При  $\omega > 2/\sqrt{LC}.$

**6.16.**  $I_1 = \frac{\mathcal{E}_0}{R} \cos 2\omega t, I_1 = \frac{\mathcal{E}_0}{2(R+R_1)}.$

**6.18.**  $\omega L = R, V_{out} = V_{in} \left( \frac{1}{3} - \frac{R_1}{R_1+R_2} \right).$

**6.19.**  $R_1 C = RC_1.$

**6.20.** а)  $\omega \leq \sqrt{\frac{2}{LC}},$  б)  $\omega \geq \sqrt{\frac{1}{2LC}},$  в)  $\Omega_2 < \omega < \Omega_1,$  де  $\Omega_1^2 = 1/LC,$   
 $\Omega_2^2 = \frac{1}{5} (\Omega_1^2 + 4\Omega^2), \Omega = 1/4LC.$

## Додатки

### Додаток А. Основні формули векторного аналізу

#### А.1 Диференціальні оператори

Оператор «набла»  $\nabla$

$$\nabla = \text{grad} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \quad (1)$$

Оператор Лапласа (лапласіан)  $\Delta$

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \nabla^2 \quad (2)$$

Дивергенція вектора  $\mathbf{A}$

$$\text{div } \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} \quad (3)$$

Ротор вектора  $\mathbf{A}$

$$\text{rot } \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (4)$$

#### А.2 Диференціальні операції в різних системах координат

Декартова система координат

$$\nabla \psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \mathbf{k} \quad (5)$$

$$\Delta \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \quad (6)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (7)$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \mathbf{k} \quad (8)$$

## Циліндрична система координат

$$\nabla\psi = \frac{\partial\psi}{\partial\rho}\mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial\psi}{\partial z}\mathbf{k} \quad (9)$$

$$\Delta\psi = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} \quad (10)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A} = & \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right)\mathbf{e}_\rho + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial\rho}\right)\mathbf{e}_\varphi + \\ & + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial(\rho A_\varphi)}{\partial\rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial\varphi}\right)\mathbf{k} \end{aligned} \quad (12)$$

## Сферична система координат

$$\nabla\psi = \frac{\partial\psi}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\mathbf{e}_\varphi \quad (13)$$

$$\Delta\psi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} \quad (14)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\theta \sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A} = & \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\varphi \sin\theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right)\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial r}(r A_\varphi)\right)\mathbf{e}_\theta + \\ & + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)\mathbf{e}_\varphi \end{aligned} \quad (16)$$

### А.3 Другі похідні

$$\text{rot grad } \varphi = \nabla \times (\nabla \varphi) = 0 \quad (17)$$

$$\text{div rot } \mathbf{A} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \quad (18)$$

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A} \quad (19)$$

### А.4 Похідні від добутків

$$\text{grad } (\varphi\psi) = \psi \text{ grad } \varphi + \varphi \text{ grad } \psi \quad (20)$$



$$\operatorname{div}(\varphi \mathbf{A}) = \varphi \operatorname{div} \mathbf{A} + \mathbf{A} \operatorname{grad} \varphi \quad (21)$$

$$\operatorname{rot}(\varphi \mathbf{A}) = \varphi \operatorname{rot} \mathbf{A} + \operatorname{grad} \varphi \times \mathbf{A} \quad (22)$$

$$\operatorname{grad}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{B} \times \operatorname{rot} \mathbf{A} + \mathbf{A} \times \operatorname{rot} \mathbf{B} + (\mathbf{B} \nabla) \mathbf{A} + (\mathbf{A} \nabla) \mathbf{B} \quad (23)$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{B} \quad (24)$$

$$\operatorname{rot}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \nabla) \mathbf{A} - (\mathbf{A} \nabla) \mathbf{B} + \mathbf{A} \operatorname{div} \mathbf{B} - \mathbf{B} \operatorname{div} \mathbf{A} \quad (25)$$

$$\frac{1}{2} \operatorname{grad} A^2 = (\mathbf{A} \nabla) \mathbf{A} + \mathbf{A} \times \operatorname{rot} \mathbf{A} \quad (26)$$

## A.5 Інтегральні характеристики та теореми

Потік вектора  $\mathbf{A}$

$$\Phi_{\mathbf{A}} = \int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \quad (27)$$

Циркуляція вектора  $\mathbf{A}$

$$\Gamma_{\mathbf{A}} = \oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \quad (28)$$

Теорема Остроградського-Гаусса

$$\int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV \quad (29)$$

Теорема Стокса

$$\oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \quad (30)$$

Теорема Гріна:

$$\int_V (\varphi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \varphi) dV = \int_S (\varphi \nabla \psi - \psi \nabla \varphi) \cdot d\mathbf{S}. \quad (31)$$

## Додаток Б. Системи одиниць в електродинаміці

Таблиця Б.1. Таблиця перевodu виразів і формул із однієї системи одиниць в іншу

Величина	Система SI	Система СГС
Швидкість світла	$(\varepsilon_0 \mu_0)^{-1/2}$	$c$
Напруженість електричного поля (потенціал)	$\sqrt{4\pi\varepsilon_0} \mathbf{E}(\varphi)$	$\mathbf{E}(\varphi)$
Електрична індукція	$\sqrt{\frac{4\pi}{\varepsilon_0}} \mathbf{D}$	$\mathbf{D}$
Густина заряду (заряд, струм, густина струму, поляризація)	$\frac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0}} \rho(q, I, \mathbf{j}, \mathbf{P})$	$\rho(q, I, \mathbf{j}, \mathbf{P})$
Магнітна індукція (вектор-потенціал)	$\sqrt{\frac{4\pi}{\mu_0}} \mathbf{B}(\mathbf{A})$	$\mathbf{B}(\mathbf{A})$
Напруженість магнітного поля	$\sqrt{4\pi\mu_0} \mathbf{H}$	$\mathbf{H}$
Намагніченість	$\sqrt{\frac{\mu_0}{4\pi}} \mathbf{M}$	$\mathbf{M}$
Провідність	$\frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}$	$\sigma$
Опір	$4\pi\varepsilon R$	$R$
Ємність	$\frac{C}{4\pi\varepsilon_0}$	$C$
Індуктивність	$4\pi\varepsilon_0 L$	$L$

Табл. Б.1 дає схему перевodu виразів і рівнянь з системи СГС в систему SI, і навпаки, при незмінності всіх механічних величин. Щоб за допомогою табл. Б.1 перетворити будь-яке рівняння, записане в системі одиниць СГС, в рівняння в системі SI, слід в обох частинах рівняння замінити символи, перелічені в стовпчику «Система СГС», на відповідні символи системи SI.

Наприклад, якщо ми маємо вираз для магнітної індукції нескінченного соленоїда в системі СГС:

$$B = \frac{4\pi}{c} In.$$

Для переведення цієї формули в систему SI, замінимо ліву частину  $B \rightarrow \sqrt{\frac{4\pi}{\mu_0}} B$ , в правій частині замінимо  $1/c \rightarrow \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$ , а  $I \rightarrow \frac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0}} I$ . Тоді отримаємо:

$$\sqrt{\frac{4\pi}{\mu_0}} B = 4\pi \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \frac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0}} In,$$

звідки

$$B = \mu_0 In.$$

Таблиця Б.2. Чисельні коефіцієнти переведу між системами SI та Гауса

Величина	Система SI	Система СГС	Відношення 1 SI = X СГС
Довжина	метр, м	сантиметр, см	$10^2$
Маса	кілограм, кг	грам, г	$10^3$
Час	секунда, с	секунда, с	1
Сила	Ньютон, Н	дина, дина	$10^5$
Робота, енергія	Джоуль, Дж	ерг	$10^7$
Тиск	Паскаль, Па	дина/см <sup>2</sup>	10
Електричний заряд	Кулон, Кл	Франклін (статКулон), Фр	$3 \cdot 10^9$
Густина електричного заряду	Кл/м <sup>3</sup>	Фр/см <sup>3</sup>	$3 \cdot 10^3$
Сила струму	Ампер, А	Фр/с (статАмпер)	$3 \cdot 10^9$
Густина струму	А/м <sup>2</sup>	Фр/(с·см <sup>2</sup> )	$3 \cdot 10^5$
Електричний дипольний момент	Кл·м	Фр·см	$3 \cdot 10^{11}$
Електрична напруга	Вольт, В	статВольт, статВ	$1/3 \cdot 10^{-2}$
Напруженість електричного поля	В/м	статВ/см	$1/3 \cdot 10^{-4}$
Індукція електричного поля	Кл/м <sup>2</sup>	Фр/см <sup>2</sup>	$3 \cdot 10^5$
Електричний опір	Ом, Ом	с/см	$1/9 \cdot 10^{-11}$
Електрична ємність	Фарад, Ф	см	$9 \cdot 10^{11}$
Напруженість магнітного поля	А/м	Ерстед, Е	$4\pi \cdot 10^{-3}$
Магнітна індукція	Тесла, Тл	Гаус, Гс	$10^4$
Магнітний дипольний момент	А·м <sup>2</sup>	ерг/Гс	$10^3$
Магнітний потік	Вебер, Вб	Максвел, Мкс	$10^8$
Індуктивність	Генрі, Гн	см	$10^9$

У визначенні розмірності індуктивності в Гаусовій системі існує деяка плутанина. Вона пов'язана з тим, що ряд авторів використовує електромагнітну систему одиниць для введення поняття індуктивності. В цій системі енергія магнітного поля визначається як  $L'I^2/2$ , в гаусовій же системі ця величина дається означенням  $LI^2/2c^2$ . Звідки видно, що  $L' = L/c^2$ , а отже розмірністю  $L' \in [\text{с}^2/\text{см}]$ .

## Додаток В. Фізичні константи

Таблиця В.1. Деякі фізичні константи в системі СГС

Константа	Символ	Значення
Швидкість світла у вакуумі	$c$	$2.99792458 \cdot 10^{10}$ см/с
Гравітаційна стала	$G$	$6.67428 \cdot 10^{-8}$ см <sup>3</sup> /(г·с <sup>2</sup> )
Стала Планка	$\hbar$	$1.0545716 \cdot 10^{-27}$ ерг·с
Елементарний заряд	$e$	$4.80320427 \cdot 10^{-10}$ Фр
Маса електрона	$m_e$	$9.10938215 \cdot 10^{-20}$ г
Енергія спокою електрона	$m_e c^2$	$0.511 \cdot 10^6$ еВ
Маса протона	$m_p$	$1.6726219 \cdot 10^{-30}$ г
Енергія спокою протона	$m_p c^2$	$938.26 \cdot 10^6$ еВ
Електрон-Вольт	еВ	$1.602 \cdot 10^{-12}$ ерг
Борівський радіус	$a_0$	$5.2917720859 \cdot 10^{-9}$ см
Магнетон Бора	$\mu_B$	$9.27400915 \cdot 10^{-21}$ ерг/Гс
Стала Больцмана	$k$	$1.3806504 \cdot 10^{-16}$ ерг/К
Універсальна газова стала	$R$	$8.314 \cdot 10^7$ ерг/(К·моль)
Число Авогадро	$N_A$	$6.022 \cdot 10^{23}$ моль <sup>-1</sup>
Атомна одиниця маси	$u$	$1.6604210^{-24}$ г

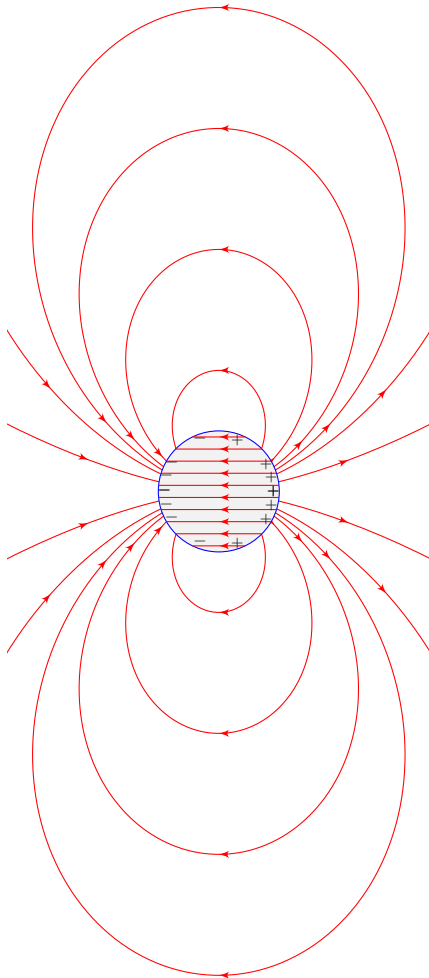
## Додаток Г. Сфери в електричному та магнітному полях

### Позначення

1.  $\mathbf{E}_0$  та  $\mathbf{B}_0$  – поля на далекій відстані від кулі.
2.  $R$  – радіус кулі.
3. Індекс  $e$  відноситься до оточуючого середовища,  $i$  – до матеріалу кулі.
4. Формули для діелектриків можна замінити на формули для металів, якщо покласти  $\frac{1}{\epsilon} \rightarrow 0$ .
5. Формули для магнетиків можна замінити на формули для надпровідників, якщо покласти  $\mu = 0$ .

### Електростатичне поле однорідно поляризованої кулі

Поле вектора  $\mathbf{E}$



Вектор поляризації в середині кулі:

$$\mathbf{P} = \text{const}.$$

Дипольний момент кулі:

$$\mathbf{p} = \frac{4\pi}{3} R^3 \mathbf{P}.$$

Напруженість електричного поля:

$$\mathbf{E} = \begin{cases} -\frac{4\pi}{3} \mathbf{P}, & r \leq R \\ \frac{4\pi}{3} R^3 \left( \frac{\mathbf{P}}{r^3} + \frac{3(\mathbf{P}\mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} \right), & r > R. \end{cases}$$

Зв'язані заряди на поверхні:

$$\sigma' = \mathbf{P} \cdot \mathbf{r}.$$

Діелектрична куля в однорідному електричному полі. Задача 1.61

Дипольний момент кулі:

$$\mathbf{p} = \frac{\varepsilon_i - \varepsilon_e}{\varepsilon_i + 2\varepsilon_e} R^3 \mathbf{E}_0,$$

Напрямок дипольного моменту визначається різницею  $\varepsilon_e - \varepsilon_i$ .

Потенціал кулі:

$$\varphi = \begin{cases} -\frac{3\varepsilon_e}{\varepsilon_i + 2\varepsilon_e} (\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r}), & r \leq R, \\ -(\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r}) + \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3}, & r > R \end{cases},$$

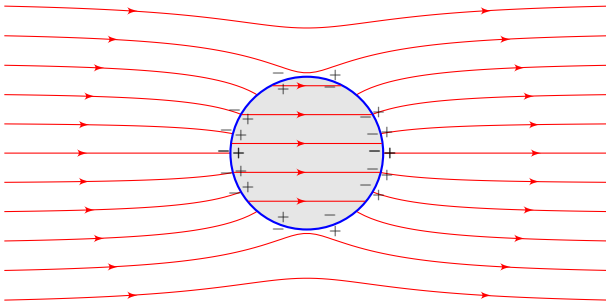
Поле кулі:

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \frac{3\varepsilon_e}{\varepsilon_i + 2\varepsilon_e} \mathbf{E}_0, & r \leq R \\ \mathbf{E}_0 - \frac{\mathbf{p}}{r^3} + \frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5}, & r > R, \end{cases}$$

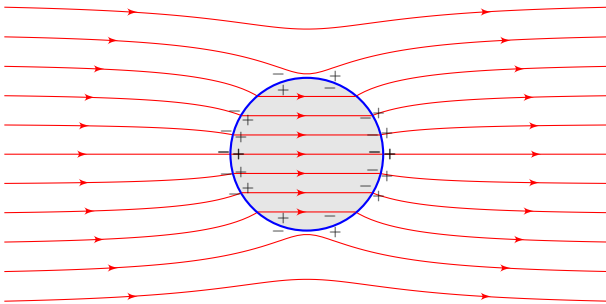
Зв'язані заряди на поверхні:

$$\sigma' = \frac{3}{4\pi} \frac{\varepsilon_i - \varepsilon_e}{\varepsilon_i + 2\varepsilon_e} \frac{\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r}}{R}.$$

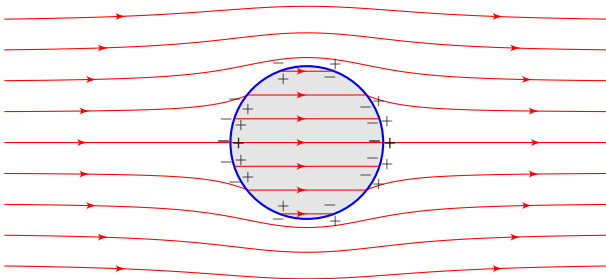
Поле вектора  $\mathbf{E}$  ( $\varepsilon_i > \varepsilon_e$ )



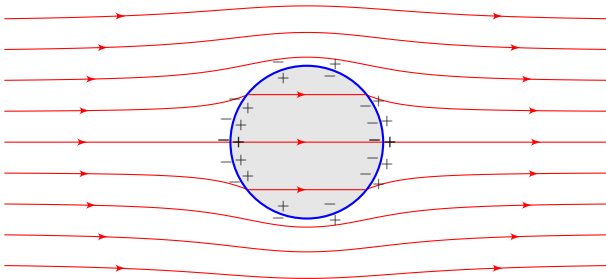
Поле вектора  $\mathbf{D}$  ( $\varepsilon_i > \varepsilon_e$ )



Поле вектора  $\mathbf{E}$  ( $\varepsilon_i < \varepsilon_e$ )



Поле вектора  $\mathbf{D}$  ( $\varepsilon_i < \varepsilon_e$ )



## Металева сфера в однорідному електричному полі

Дипольний момент кулі:

$$\mathbf{p} = R^3 \mathbf{E}_0,$$

Потенціал кулі:

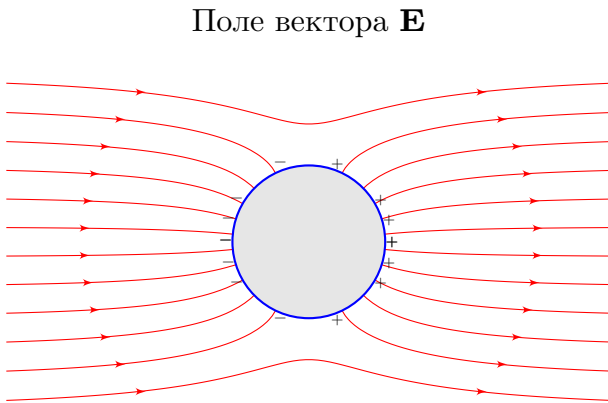
$$\varphi = \begin{cases} 0, & r \leq R \\ -(\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r}) + \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3}, & r > R \end{cases},$$

Поле кулі:

$$\mathbf{E} = \begin{cases} 0, & r \leq R \\ \mathbf{E}_0 - \frac{\mathbf{p}}{r^3} + \frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5}, & r > R, \end{cases}$$

Вільні заряди на поверхні:

$$\sigma = \frac{3}{4\pi} \frac{\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r}}{R}.$$



## Провідна куля в середовищі по якому тече струм. Задача 2.14

Дипольний момент кулі:

$$\mathbf{p} = \frac{\lambda_i - \lambda_e}{\lambda_i + 2\lambda_e} R^3 \mathbf{E}_0,$$

Поле:

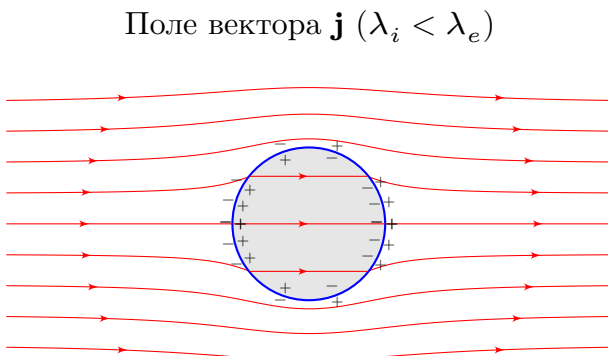
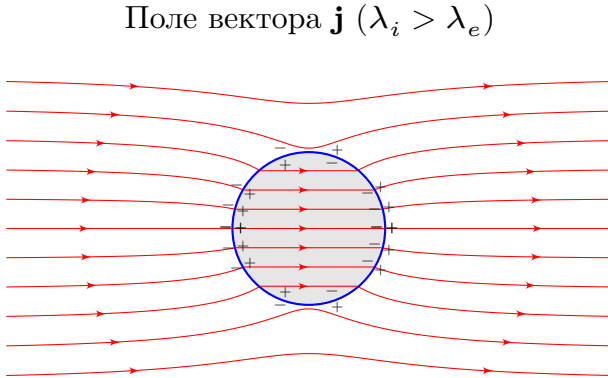
$$\mathbf{E} = \begin{cases} \frac{3\lambda_e}{\lambda_i + 2\lambda_e} \mathbf{E}_0, & r \leq R \\ \mathbf{E}_0 - \frac{\mathbf{p}}{r^3} + \frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5}, & r > R, \end{cases}$$

Густина струму:

$$\mathbf{j} = \begin{cases} \frac{3\lambda_e}{\lambda_i + 2\lambda_e} \mathbf{j}_0, & r \leq R \\ \mathbf{j}_0 + \lambda_e \frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \lambda_e \frac{\mathbf{p}}{r^3}, & r > R, \end{cases}$$

Заряди на поверхні:

$$\sigma = \frac{3}{4\pi} \frac{\lambda_i - \lambda_e}{\lambda_i + 2\lambda_e} \frac{\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r}}{R}.$$



**Куля з магнетика в однорідному магнітному полі. Задача 3.34**

Дипольний момент кулі:

$$\mathbf{p}_m = \frac{\mu_i - \mu_e}{\mu_i + 2\mu_e} R^3 \mathbf{B}_0,$$

Поле кулі:

$$\mathbf{B} = \begin{cases} \frac{3\mu_i}{\mu_i + 2\mu_e} \mathbf{B}_0, & r \leq R \\ \mathbf{B}_0 - \frac{\mathbf{p}_m}{r^3} + \frac{3(\mathbf{p}_m \mathbf{r}) \mathbf{r}}{r^5}, & r > R, \end{cases}$$

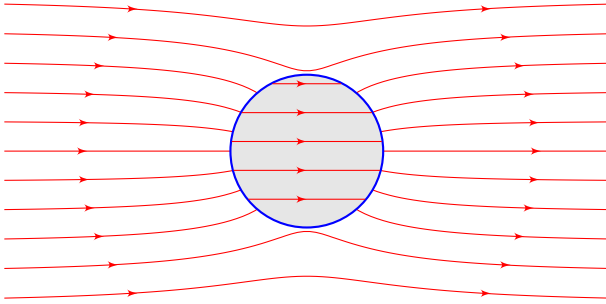
Густина об'ємних струмів намагнічування  $\mathbf{j}' = 0$ .

Поверхнева густина струмів намагнічування

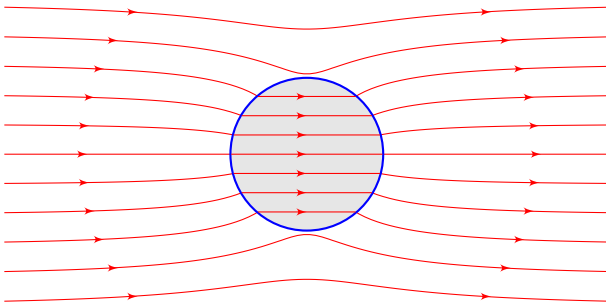
$$i = \frac{3c}{4\pi} \frac{\mu_i - \mu_e}{\mu_i + 2\mu_e} \frac{\mathbf{B}_0 \mathbf{r}}{R},$$

де  $\mathbf{r}$  – радіус-вектор поверхні провідника.

Поле вектора  $\mathbf{H}$  ( $\mu_e > \mu_e$ )



Поле вектора  $\mathbf{B}$  ( $\mu_e > \mu_e$ )



**Надпровідна куля в однорідному магнітному полі  $\mathbf{B}_0$ . Задача 4.17**

Дипольний момент кулі:

$$\mathbf{p}_m = -\frac{1}{2} R^3 \mathbf{B}_0,$$

Поле кулі:

$$\mathbf{B} = \begin{cases} 0, & r \leq R \\ \mathbf{B}_0 - \frac{\mathbf{p}_m}{r^3} + \frac{3(\mathbf{p}_m \mathbf{r}) \mathbf{r}}{r^5}, & r > R, \end{cases}$$

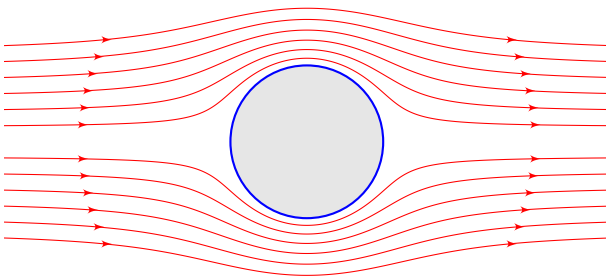
Густина об'ємних струмів намагнічування  $\mathbf{j}' = 0$ .

Поверхнева густина струмів намагнічування

$$i = -\frac{3c}{8\pi} \frac{\mathbf{B}_0 \mathbf{r}}{R},$$

де  $\mathbf{r}$  – радіус-вектор поверхні провідника.

Поле вектора  $\mathbf{B}$





## Література

### Підручники та посібники

1. *Алешкевич В. А.* Электромагнетизм. — М. : Физматлит, 2014. — 404 с.
2. *Ахиезер А. И.* Общая физика : Электрические и магнитные явления: Справочное пособие. — К. : Наукова думка, 1981. — 472 с.
3. *Ахиезер А. И., Ахиезер И. А.* Электромагнетизм и электромагнитные волны. — М. : Высшая школа, 1985. — 504 с.
4. *Джесксон Д.* Классическая электродинамика. — М. : Мир, 1965. — 703 с.
5. *Зильберман Г. Е.* Электричество и магнетизм. — М. : Наука, 1970. — 384 с.
6. *Иваненко Д. Д., Соколов А. А.* Классическая теория поля. — ГИТТЛ, 1951. — 479 с.
7. *Калашников С. Г.* Электричество. — 6-е изд. — М. : Физматлит, 2004. — 624 с. — ISBN 5-9221-0312-1.
8. *Матвеев А. Н.* Том 3. Электричество и магнетизм. — Высшая школа, 1983. — 463 с.
9. *Мешков И. Н., Чириков Б. В.* Электромагнитное поле : в 2 частях. Часть 1. Электричество и магнетизм. — Н. : Наука, 1987. — 272 с.
10. *Парновский С.* [Дополнительные материалы по курсу электричества и магнетизма: методическое пособие.](#) — 2014. — 24 с.
11. *Парселл Э.* Берклевский курс физики : в 6 т. Том 2. Электричество и магнетизм. — 3-е изд. — М. : Наука, 1983. — 416 с.
12. *Пеннер Д. И., Угаров В. А.* Электродинамика и специальная теория относительности. — М. : Просвещение, 1980. — 271 с.

13. *Савельев И. В.* Курс общей физики. Том 2. Электричество. — 3-е изд. — М. : Наука, 1988. — 496 с.
14. *Сивухин Д. В.* Общий курс физики : в 5 т. Том 3. Электричество. — 4-е изд. — М. : Физматлит, 2004. — 655 с.
15. *Тамм И. Е.* Основы теории электричества. — 11-е изд. — М.: Физматлит, 2003. — 618 с.
16. *Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М.* Фейнмановские лекции по физике. Выпуск 6. Электродинамика. — 2-е. — М.: Мир, 1977. — 354 с.
17. *Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М.* Фейнмановские лекции по физике. Выпуск 5. Электричество и магнетизм. — 2-е. — М.: Мир, 1977. — 306 с.
18. *Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М.* Фейнмановские лекции по физике. Выпуск 7. Физика сплошных сред. — 2-е. — М.: Мир, 1977. — 290 с.

## Задачники

19. *Зильберман А. Р., Сурков Е. Л.* Задачи для физиков. — 1971.
20. Сборник задач по общему курсу физики. III. Электричество и магнетизм / С. П. Стрелков [и др.] ; под ред. И. А. Яковлев. — 5-е. — М.: Физматлит, 2006. — 232 с.
21. Сборник задач по общему курсу физики. Часть 2. Электричество и магнетизм. Оптика / С. М. Козел [и др.] ; под ред. В. А. Овчинкин. — Наука, 2004. — 400 с.
22. *Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М.* Фейнмановские лекции по физике. Задачи и упражнения с ответами и решениями / под ред. А. П. Леванюк. — 3-е, переработанное. — М.: Мир, 1978. — 546 с.